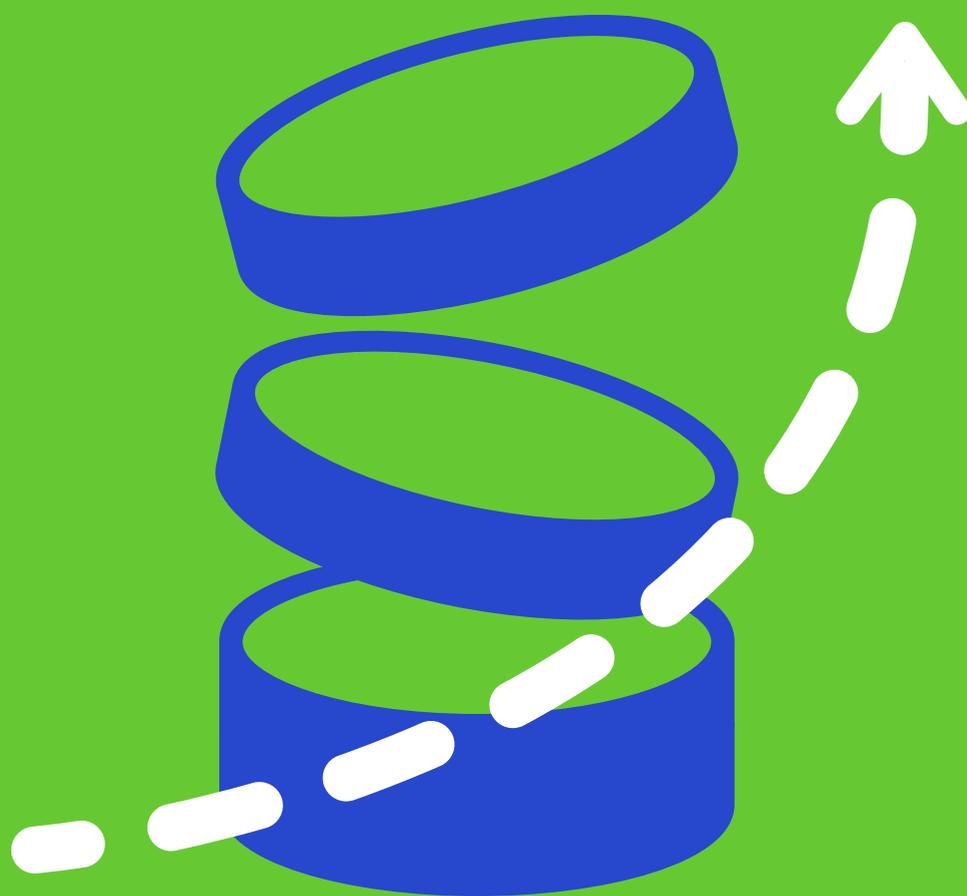


Coleção Livro Aberto de Matemática
Ensino Médio

Educação Financeira

Livro do Professor



Ivail Muniz Junior



Educação Financeira

2ª edição, 5 de agosto de 2023

Ivail Muniz Junior

ISBN: 978-85-244-0521-1

Publicado no Brasil / Published in Brazil

Licença



Coleção Livro Aberto de Matemática

Revisão: Amarildo Melchhiades da Silva, José Ezequiel Soto Sánchez,
Fabio Luiz Borges Simas, Vanessa Matos

Capa: Enzo Esberard

Ilustrações: Agnes Antonello

Diagramação e Gráficos: Tarso Boudet Caldas

Realização: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA)

Estrada Dona Castorina, 110

Jardim Botânico

22460-320, Rio de Janeiro, RJ

www.impa.br

editora@impa.br

M966 Muniz Junior, Ivail,
Educação Financeira/Ivail Muniz Junior — 2ª ed. — Rio de Janeiro,
IMPA, 2023.

133 p.: il. color (Coleção Livro Aberto de Matemática)

E-book

ISBN 978-85-244-0521-1 (Versão professor)

1. Matemática. I. Título II. Série

CDD: 510
Carolina Celano Lima/CRB-7: 2438

SUMÁRIO

Introdução ao Professor	viii
1 Em que Terreno Estamos Pisando?	1
Explorando: Em que Terreno Estamos Pisando?	5
Organizando: Uma Concepção de Educação Financeira	6
Praticando: Ampliando a visão sobre Educação Financeira	9
2 Orçamento e Planejamento Financeiro	13
Explorando: Orçamento e Planejamento Financeiro	13
Organizando: Diagnóstico e Plano de Ação	14
Praticando: Orçamento e Planejamento Financeiro	17
3 O Valor do Dinheiro no Tempo	21
Explorando: O Valor do Dinheiro no Tempo	22
Organizando: Valor Presente e Valor Futuro	23
Praticando: Valor Presente e Valor Futuro	31
4 Capitais Equivalentes	35
Explorando: Capitais Equivalentes	35
Organizando: Capitais Equivalentes	35
Praticando: Capitais Equivalentes	38
5 Séries Uniformes	41
Explorando: Séries Uniformes	42
Organizando: Séries Uniformes	42
Praticando: Séries Uniformes e Previdência	54

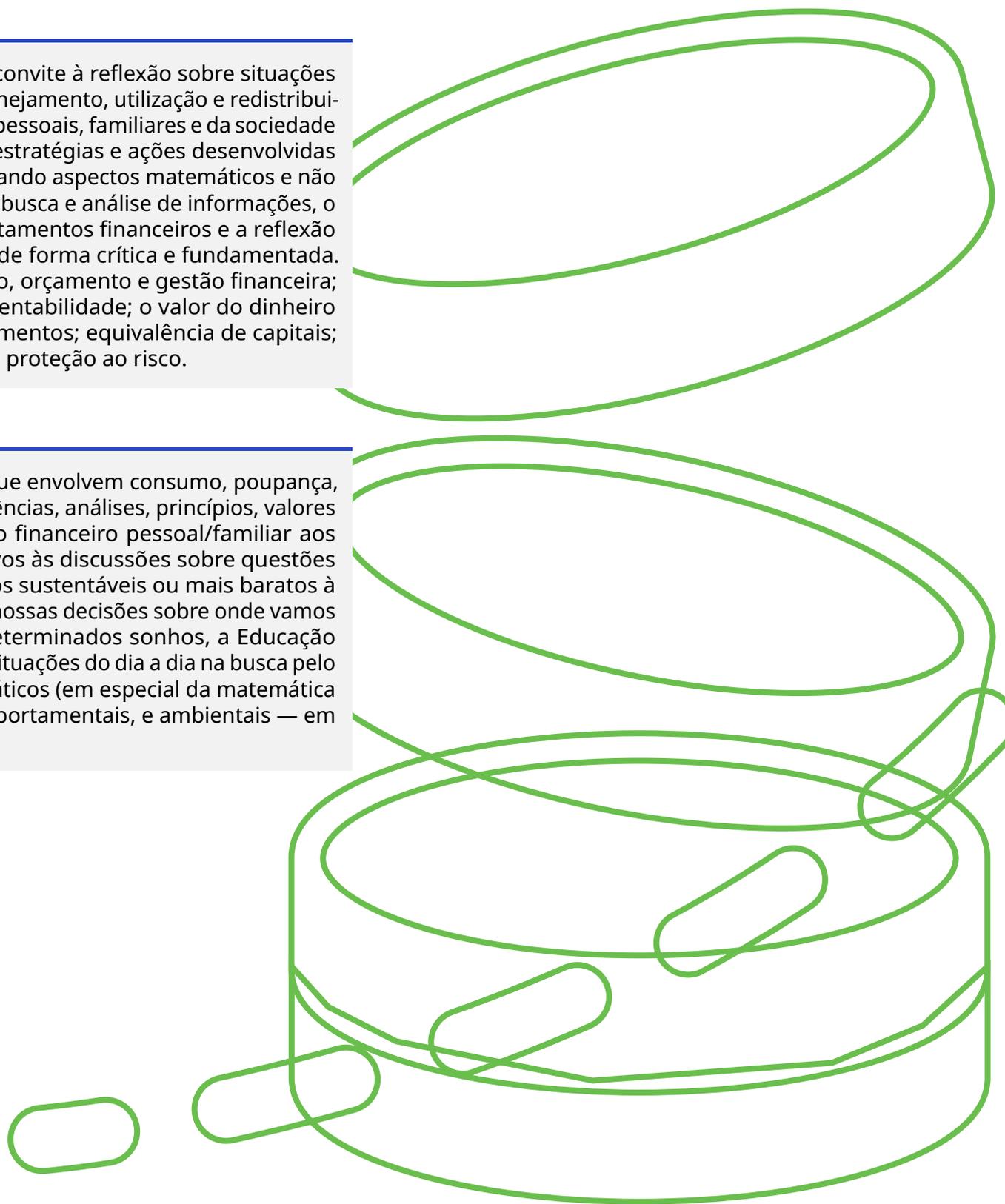
6 Taxas de Juros no Cenário Brasileiro	57
Explorando: Taxas de Juros no Cenário Brasileiro	58
Organizando: Taxas de Juros no Cenário Brasileiro	58
Praticando: Capitais e Taxas Equivalentes	62
7 Inflação e Poder de Compra	67
Explorando: Inflação e poder de compra	69
Organizando: Índices de Inflação e Seus Impactos	70
Praticando: Inflação e Poder de Compra	78
8 Tributação e Futuro	79
Explorando: Tributação e Futuro	79
Organizando: Imposto, Taxa e Contribuição no Brasil	80
Praticando: Tributação nos Investimentos	87
9 Consumo, Cultura e Sustentabilidade	89
Explorando: Consumo, Cultura e Sustentabilidade	89
Organizando: Heurísticas e Vieses	91
Praticando: Comportamento e Consumo	95
Exercícios	98
Solução dos exercícios	G.1
Notas	H.1

O quê?

Educação Financeira em Contextos Escolares (EFCE) é um convite à reflexão sobre situações econômicas e financeiras relacionadas com a aquisição, planejamento, utilização e redistribuição do dinheiro, frente às demandas, projetos e realizações pessoais, familiares e da sociedade na qual se vive. Um convite baseado em um conjunto de estratégias e ações desenvolvidas para o contexto escolar, visando formação cidadã, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos, didáticos e multidisciplinares, que estimule a busca e análise de informações, o uso de métodos matemáticos, a compreensão de comportamentos financeiros e a reflexão sobre atitudes/decisões, e suas possíveis consequências, de forma crítica e fundamentada. Abordaremos temas como renda e trabalho; planejamento, orçamento e gestão financeira; consumo, comportamento do consumidor, cultura e sustentabilidade; o valor do dinheiro no tempo e suas causas: inflação, câmbio, juros e investimentos; equivalência de capitais; tributação, impostos e contribuições sociais; previdência e proteção ao risco.

Por quê?

Vivemos diariamente situações financeiras e econômicas que envolvem consumo, poupança, proteção e investimento, em que os nossos desejos, preferências, análises, princípios, valores e escolhas estão presentes e conectadas. Do orçamento financeiro pessoal/familiar aos nossos padrões de consumo; das compras pelos aplicativos às discussões sobre questões demográficas e previdenciárias; das escolhas por produtos sustentáveis ou mais baratos à forma como escolhemos o combustível do automóvel; das nossas decisões sobre onde vamos passar as férias aos planos e estratégias para realizar determinados sonhos, a Educação Financeira aqui abordada será um convite à reflexão sobre situações do dia a dia na busca pelo exercício crítico da cidadania, integrando aspectos matemáticos (em especial da matemática financeira) e não matemáticos (dentre eles os sociais, comportamentais, e ambientais — em especial da psicologia econômica e da sustentabilidade).



AGRADECIMENTOS

Este módulo de Educação Financeira do Livro Aberto de Matemática é fruto da articulação entre experiência em sala de aula e pesquisa acadêmica. Gostaria de agradecer a alguns interlocutores que foram construindo comigo ao longo de vários anos as ideias que fundamentam essa obra, muito antes dela sequer ser pensada ou concebida, quer como parceiros de pesquisa nos programas de Pós-graduação do Colégio Pedro II (CPII), quer em fóruns sobre Educação Financeira no Brasil e fora dele. Agradeço aos professores Daniel Martins, Rony Barros, Josimar Silva e Andreia Maciel do CPII. Aos professores Amarildo Melchades, Chang Kuo e Marco Kistemann da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF); Arthur B. Powell da Rutgers University. Aos professores Carlos Heitor Campani, Marcos Ávila, Vicente Ferreira e da Economista Margarida Gutierrez do Instituto Instituto de Pós-Graduação e Pesquisa em Administração da UFRJ (COPPEAD /UFRJ). Ao professor e contador Luiz Antônio Ochsendorf, da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) e conselheiro do Conselho Regional de Contabilidade do Estado do Rio de Janeiro (COPPEAD /RJ); aos professores Fernando Villar e Leo Akio do Colégio de Aplicação da UFRJ (CAp-UFRJ); Rafael Novoa e André Silva do Instituto Federal do Rio de Janeiro (IFRJ). Às professoras Cristiane Pessoa e Gilda Guimarães da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). A professora Vanessa Matos pela parceria no curso e na finalização deste volume. Aos professores da equipe do Livro Aberto que deram sugestões ao trabalho, em especial a Letícia Rangel, Fábio Simas (Coordenador) e Humberto Bortolossi. Aos meus orientandos Michela Santana, Natasha Cardoso, Vanessa Borges, Wagner Bernardes, Mauricio Quintanilha e Lucas Ribeiro no âmbito dos programas de residência docente, especialização em Educação Matemática e do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (ProfMat). A todos os meus alunos da Escola Técnica Estadual João Luiz do Nascimento, do CPII — Campus Centro e do Colégio de São Bento do Rio de Janeiro com os quais tive a honra de conversar, trocar, experimentar e aprender por meio de interações em aulas, bate papos informais, projetos e programas de iniciação científica Júnior.

Finalmente eu agradeço, em nome da equipe do Livro Aberto de Matemática, aos docentes espalhados pelo Brasil que estiverem efetivamente conosco em nosso primeiro curso de extensão de Educação Financeira no âmbito do Projeto Livro, contribuindo para o aperfeiçoamento desse volume. São eles(as): Aldair Santana Coelho, Amanda Pereira Lima Mesquita, Ana Clara Bonete, Ana Paula Dantas de Souza, André Monteiro Novaes, Daniela Presotti, Danielle Angélica da Luz e Silva, Dilo Marquesini, Erica Marlucia Leite Pagani, Fábio Henrique da Silva, Fábio Henrique Marinho Cabral, Fábio Pinheiro Pergentino, Fernanda Erculano, Gabriel Bernardino, Jaqueline Cardoni Herrera, José Carlos Nogueira, Josivaldo Gonçalves dos Santos, Ligia Maria Ferreira do Couto, Lucas José Ribeiro, Manoela Franco da Silva, apre Mariléia Maria da Silva, Nair da Conceição Pinto, Osvaldo Marcelino, Railson Costa da Silva, Raquel Oliveira Bodart, Samuel de Oliveira Cardoso, Sergio Gouveia de Assis, Vanessa Henriques Borges, Virginia Teodoro Inocêncio.



INTRODUÇÃO AO PROFESSOR

Entendendo o Módulo de Educação Financeira do Livro Aberto

Olá Professor! Este é o módulo do Livro Aberto (LA) de Matemática sobre Educação Financeira em Contextos Escolares (EFCE ou EFE). Ainda que o texto siga essencialmente a mesma estrutura que os demais módulos do LA, ele tem algumas características diferentes, em especial a natureza multidisciplinar das situações e conceitos abordados (econômicos, comportamentais, culturais, ambientais, etc), e também a forma como a Educação Financeira (EF) é concebida e abordada.

Vamos apresentar primeiro os objetivos gerais e, em seguida, três concepções muito importantes para entender a proposta deste módulo de EF.

Objetivos gerais

- a) Convidar os estudantes e professores a refletirem sobre situações financeiras e econômicas relacionadas a aquisição, utilização, distribuição e acumulação do dinheiro, para satisfação de suas necessidades, por meio da produção de Ambientes de Educação Financeira Escolar.
- b) Convidar os estudantes e professores a refletirem sobre suas atitudes, opções, escolhas e as possíveis consequências dessas escolhas, em situações de renda, consumo, crédito, poupança/investimento, risco e proteção, de modo ético e sustentável.
- c) Oferecer informações para que sejam aptos a analisar, fazer julgamentos fundamentados, tomar decisões e ter posições críticas sobre questões financeiras que envolvam sua vida pessoal, familiar e da sociedade em que vivem.

Três concepções importantes.

Tenha em mente que Educação Financeira não é Matemática Financeira

Matemática Financeira é, essencialmente, um conjunto de conceitos e técnicas que modelam situações financeiras envolvendo o valor do dinheiro no tempo. Educação Financeira na Escola é um processo de educar pessoas ajudando-as na análise e tomada de decisão sobre situações financeiras. E isso envolve aspectos matemáticos (incluindo temas de matemática financeira) e não matemáticos (tais como econômicos, culturais, comportamentais e ambientais). Além disso, Educação Financeira na Escola interliga questões financeiras com questões didáticas inerentes ao processo de ensino e aprendizagem. Ou seja, Educação Financeira Escolar pode ser considerada um processo educativo que envolve vários temas econômicos, de forma transversal e multidisciplinar, que busca contribuir com a formação cidadã, já na Educação Básica, em uma sociedade economicamente complexa. De fato, vivemos em uma sociedade marcada por grandes transformações e desigualdades sociais: se de um lado temos desenvolvimento tecnológico sem precedentes que proporcionam melhoria da qualidade de vida de bilhões de pessoas, de outro temos milhões de seres humanos que vivem na mais terrível pobreza.

Nossa proposta de Educação Financeira, baseada em Ivail Muniz Jr. (2016a, 2016b) e Muniz Jr. e Samuel Jurkiewicz (2016b), um convite à reflexão envolvendo aspectos matemáticos e não matemáticos sobre situações econômico-financeiras (SEF), relacionadas com a aquisição, planejamento, uso e distribuição do dinheiro, para a satisfação das necessidades humanas.

Um convite que ofereça aos estudantes oportunidades de construir posições fundamentadas e críticas sobre atitudes, decisões e suas consequências.

Essa abordagem de educação financeira se alinha com uma prática comum e recente, observada em vários países, que é tratar temas econômicos e financeiros na Educação Básica, partindo da



premissa de que pensar alguns aspectos da realidade social, considerados como econômicos, pode oferecer oportunidades para que jovens ampliem suas leituras sobre o mundo, numa perspectiva local e global. Na perspectiva local, busca-se refletir e pensar sobre a economia da família e suas decisões variadas sobre trabalho, educação, consumo, poupança, investimento e proteção. Na perspectiva global, convidamos estudantes a pensarem sobre algumas forças que atuam na economia como um todo, tais como relações entre educação, renda e trabalho, e suas transformações; inflação e estratégias de proteção em contextos brasileiros; desigualdade econômica e distribuição de renda; taxas de juro e custo do crédito; oferta e demanda com seus impactos no orçamento e planejamento financeiros das famílias, dentre outras.

Olhando para o Brasil, temos vários motivos que justificam a importância de uma Educação Financeira que ajude as pessoas, incluindo nossos alunos, a lidarem com desafios financeiros inseridos em um cenário econômico complexo e dinâmico, como temos observado nas últimas décadas. A estabilidade da moeda (a partir de 1994), o aumento da renda, o crescimento da classe média brasileira, o aumento da oferta de crédito para bens (móveis e imóveis) e serviços, a ampliação do prazo dos financiamentos imobiliários, a velocidade da geração e do consumo de bens e serviços, a redução do grau de desigualdade de renda, além do aumento da expectativa de vida da população, compõem um conjunto de profundas mudanças sociais e econômicas ocorridas no país que demandam da população brasileira uma Educação Financeira que contribua para leitura do mundo, identificação e comparação de opções, análises e decisões fundamentadas.

Além dessas mudanças, a crise internacional de 2008 e a recente crise econômica brasileira iniciada em 2015, agravada pela pandemia do novo corona vírus em 2020–2021, ampliaram o conjunto de transformações, tais como aumento do desemprego, aumento da inflação, aumento do nível de insegurança alimentar, redução da renda média (em 2021 chegou ao nível de 2012, conforme Pesquisa Amostral Domiciliar Contínua (PNAD Contínua ou PNAD) de 2021), aumento da taxa básica de juro — Selic, redução do nível de atividade econômica em diversos setores (imobiliário, industrial, aéreo, educacional, varejo, dentre outros).

Temos, portanto, uma diversidade de fatores que têm impactado fortemente a vida dos brasileiros, conforme se pode ver em IBGE (2022c), Miriam Leitão (2011) e Marcelo Cortes Neri (2010)

Assim, baseado nas concepções de Muniz Jr. (2016a), vamos então chamar de **Educação Financeira em Contextos Escolares**, ou simplesmente Educação Financeira Escolar, ao conjunto de estratégias e ações desenvolvidas para o contexto escolar, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos, didáticos e multidisciplinares, que *convidem os estudantes a refletirem* sobre situações econômicas e financeiras relacionadas com a aquisição, planejamento, utilização e redistribuição do dinheiro, de forma crítica e fundamentada, e também sobre possíveis consequências de suas decisões e atitudes frente às suas demandas, necessidades, projetos e realizações em sua vida pessoal, familiar e da sociedade em que vivem.

Um convite que considera *aspectos matemáticos e não matemáticos* na análise e na tomada de decisão, e que também leva em consideração o contexto social e econômico dos estudantes, as características culturais e singularidades sociais da região em que vivem, bem com os desafios da realidade econômica e social brasileira.

Buscamos uma Educação Financeira que estimule os estudantes a pensarem de forma mais crítica e analítica (quando possível), vivendo e se protegendo nesta dinâmica social, aproveitando oportunidades de modo ético e sustentável e se defendendo das muitas armadilhas econômicas e financeiras com as quais certamente têm ou terão que lidar.

Uma Educação Financeira que leve em consideração as singularidades culturais e sociais da região onde as pessoas vivem, incluindo o poder aquisitivo e seus valores e que os convide a entender que suas escolhas financeiras podem ter impactos não



apenas financeiros, mas também políticos, sociais e, também, ambientais (Muniz Jr, 2016a).

A Educação Financeira aqui é diferente em vários aspectos.

Nossa concepção de EF tem várias características diferentes das iniciativas de educação financeira de Bancos, empresas, seguradoras, consultores financeiros, dentre outros agentes. A primeira diferença é que ela é voltada para a Educação Básica, apoiada em 4 princípios, e pensada/testada para estimular a produção de Ambientes de Educação Financeira Escolar.

Essa EFCE visa mobilizar os estudantes a pensarem de forma crítica, avaliando opções, considerando riscos e pensando em possíveis alternativas. Ela foi construída a partir de quatro princípios fundamentais: *convite à reflexão*, *conexão didática*, *dualidade* e *lente multidisciplinar*, conforme apresentados em Muniz Jr. e Jurkiewicz (2016b).

Figura P.1: Princípios fundamentais da Educação Financeira Escolar



Adaptado de Muniz Jr. (2016a).

Ivail Muniz

O *convite à reflexão* deixa claro que aqui **não vamos dizer**: seja um poupador, compre sempre à vista, tome crédito para realizar sonhos e ser feliz, torne-se um milionário, seja um empreendedor arrojado, antecipe seu 13º terceiro ou seu Imposto de Renda, lute ferozmente para ser um vencedor custe o que custar e coisas afins. Não diremos isso, ainda que isso possa ser a escolha de alguns de nossos alunos. A Educação Financeira aqui não será prescritiva ou impositiva, e sim um *convite aos estudantes* para que tenham oportunidades de *reflexão* através da leitura de situações financeiras que contemplem diferentes aspectos, incluindo os de natureza matemática, para que pensem, avaliem e tomem suas próprias decisões. E que essa reflexão inclua mudança de atitude, e os ajude a considerar as possíveis consequências de suas ações. Tenha em mente que aquilo que pode ser ótimo para uma pessoa pode ser péssimo para outra, ainda que o ótimo financeiro possa ser um invariante nos dois casos. Então, muito cuidado com os problemas e exercícios do tipo “Qual é a melhor decisão?”

A *conexão didática* reforça que a Educação Financeira é na Escola, para a Escola e com a Escola. Esse princípio reforça a importância do contexto escolar no fazer educação financeira. Queremos que essa EFCE ajude a entender como os alunos pensam matematicamente para analisar situações financeiras e que aspectos não matemáticos emergem durante esse processo de ensino e aprendizagem, de modo que essa compreensão gere **novos materiais, novas formas de ensinar**,



e **novos processos de avaliação**. E que tudo isso contribua para uma formação que ajude o estudante a ser livre, crítico e mais analítico.

A *dualidade* marca uma posição: a Educação Financeira Escolar pode e deve ser uma via de mão dupla, e portanto dual, de modo que tanto os conhecimentos matemáticos dos estudantes os auxiliem na compreensão, análise e tomada de decisão em SEF, como a abordagem de uma EFCE contribua para o desenvolvimento das habilidades matemáticas dos estudantes. Ou seja, ensino de matemática e educação financeira sejam lados de uma mesma moeda.

E finalmente, o princípio da *lente multidisciplinar* nos traz que é indispensável oferecer múltiplas leituras sobre as situações financeiras, de modo que aspectos financeiros, econômicos, matemáticos, comportamentais, culturais, sociais, políticos e ecológicos possam ser utilizados de forma articulada, na leitura de situações de consumo, renda, endividamento, investimento, planejamento financeiro, sustentabilidade, etc. Estudos do Marketing, da Neurociência, da Economia, da Teoria Cultural do Consumo (Antropologia e Sociologia do Consumo) se constituem em diferentes lentes. E como lentes, focam alguns aspectos e desfocam outros.

E para finalizar, gostaríamos de explicar em que sentido usamos o termo Ambientes de Educação Financeira Escolar (AEFE).

AEFE não se refere a lugares, espaços escolares, ambientes físicos pré-determinados, mas sim às interações entre pessoas, quando analisam e investigam situações econômico-financeiras, no contexto das atividades didáticas propostas, bem como quando dizem quais decisões tomariam em tais situações.

Assim, quando um aluno diz que tomaria a decisão de reduzir o consumo de energia elétrica em sua casa para ajudar a equilibrar o orçamento ou para usar o dinheiro gasto desnecessariamente com algo importante para a família, ele o faz no contexto daquela tarefa, imaginando a situação a partir da sua experiência, e mobilizando formas e conceitos matemáticos para aquela atividade. É para a atividade que ele o faz. É para a atividade humana de ler, interpretar e escolher em situações inseridas em tarefas didáticas.

Ou seja, são nos AEFE que as reflexões e escolhas acontecem, e não há garantias de que essas reflexões e escolhas seriam as mesmas em outros contextos. Assim como todo o processo educacional, as variadas experiências e reflexões vão gerando oportunidades de se formar hábitos, culturas e mentalidades.

Pode ser que em uma situação semelhante em sua casa, a decisão seja semelhante. Espera-se que as reflexões em aula gerem possibilidades de novas atitudes em casa, ou em qualquer outro espaço. Mas elas podem ser diferentes. Ele pode pensar de uma maneira no ambiente de educação financeira escolar e pensar de outra em casa, por influência dos pais, falta de cobrança, esquecimento, ou qualquer outro motivo. Assim como pode pensar diferente, tendo outras reflexões ou podendo fazer novas conexões, inclusive com as experiências que teve em AEFE, se o professor o levar para uma feira, um shopping, o mercado central ou centro comercial com várias lojas em sua cidade ou simplesmente para a cantina da escola.

A decisão do papel pode não ser a decisão do shopping.

Por exemplo, quando o estudante analisa uma SEF envolvendo, por exemplo, uma tarefa que discuta a importância da preparação e do estudo na Educação Básica, a partir de dados do IBGE sobre desemprego entre jovens, e diz que estudar é importante a partir da leitura que ele fez de um gráfico mostrando uma correlação positiva entre escolaridade e salários, não significa que no dia seguinte vai passar a se engajar mais nas tarefas escolares, ou que vai estudar com afinco para as provas que acontecerão na semana seguinte.

Mais um exemplo. Se um estudante pensa, analisa ou calcula o custo do uso do cheque especial, por um determinado prazo, e o impacto que isso pode trazer no orçamento da família, isso



não significa que ele vá, necessariamente, abandonar a ideia de usar o cheque especial ou que a família não venha a usar o cheque especial. Mas pode ajudar a repensar o modelo de smartphone desejado, buscando adequar o custo ao orçamento da família, de forma mais responsável.

A decisão do papel pode não ser a decisão do shopping. A decisão que alguém diz que tomaria em relação à poupança, pode ser diferente do hábito de não poupar que o jovem vinha mantendo. Marcamos com isso uma posição clara: é para os ambientes que os significados são produzidos, e na medida que os convites forem sendo feitos, os jovens terão oportunidades de pensar sobre atitudes e escolhas, a partir do exercício de pensar levando em consideração aspectos matemáticos e econômicos.

Assim, são para tais ambientes que analisamos as decisões que podem (ou não) influenciar suas escolhas ao longo da vida. Tais ambientes podem ser formados por momentos de sala de aula, projetos escolares, pesquisas acadêmicas, investigações, palestras, rodas de conversa, formação de professores da Educação Básica, dentre outros, em que as situações financeiras são tratadas por meio do convite à reflexão.

Este módulo de Educação Financeira não é prescritivo nem restritivo, mas busca ser formativo, “inspirativo” e provocativo.

Esse livro não define caminhos, e nem tem a ambição de ser um manual de atividades de educação financeira. É apenas formativo, inspirativo e provocativo. O livro aponta princípios e ideias, envolvendo aspectos matemáticos e não matemáticos, para que o professor construa, juntamente com seus alunos, seus próprios caminhos, tomem suas próprias decisões e decidam por onde querem ir.

Há muitas atividades que poderiam ser consideradas como de Educação Financeira, dentre as quais poderíamos citar: a análise de uma conta de luz para identificar excesso de consumo ou possíveis desperdícios; a escolha de um melhor plano de telefonia móvel ou banda larga; uma feira para angariar fundos para uma formatura; uma campanha solidária para arrecadar mantimentos para atender pessoas em tempos de pandemia; o desperdício de comida no refeitório de sua escola; o reaproveitamento de água na escola, e o possível uso dos recursos economizados para a melhoria das condições da quadra esportiva (compra de redes, balizas, ...), dentre outras.

Mas o objetivo deste livro é mostrar alguns princípios, caminhos, conceitos e ideias. E é claro apresentar algumas atividades para que o professor as utilize como quiser, mas que construa suas próprias atividades, considerando sua realidade econômica, suas peculiaridades regionais, e o perfil de seu aluno, respeitando o direito do estudante de ser quem ele quiser, mas entendendo que suas escolhas e atitudes têm consequências para ele, sua família e para a sociedade em que vivem.



PARA O PROFESSOR: EM QUE TERRENO PISAMOS?

Objetivo geral

Entender a concepção de Educação Financeira e sua importância na reflexão e na tomada de decisão em situações econômico-financeiras (SEF).

Conceitos abordados: Educação Financeira em Contextos Escolares (EFCE ou EFE) e SEFs

Habilidades da BNCC

EM13MAT104 Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.

Recomendações para o professor

Nesta primeira seção, apresente aos alunos essa concepção de EF, que considera aspectos matemáticos e não matemáticos na análise das situações financeiras, na resolução de problemas e na tomada de decisão. Reforce que é um convite para que ele pense, analise e tome as próprias decisões.

Apresentamos onze situações, para dar um panorama geral.

Escolhemos duas situações que estão articuladas com a **EM13MAT104** do EM, que trata de interpretação de índices sócio-econômicos. Mas também está articulada com os conceitos de taxa e fator de crescimento, que será usado em alguns momentos do Ensino Médio, como em Função Exponencial, Progressão Geométrica, dentre outros.

Apresentamos um texto inicial seguido de uma série de situações financeiras que mostram a diversidade de temas relacionados com Educação Financeira que podem ser tratados nas aulas de matemática do Ensino Médio (e alguns deles no Ensino Fundamental também).

São onze situações que estão associadas às seguintes temáticas:

- Renda e trabalho
- Planejamento, orçamento e gestão
- Juros: crédito ou investimentos
- Consumo, cultura e comportamento
- Índices econômicos, câmbio, inflação e poder de compra
- Tributação, contribuições e futuro
- Risco, retorno e proteção
- Consumo, sustentabilidade e atitude

Essas onze SEF iniciais não são atividades para serem feitas imediatamente. Elas serão exploradas ao longo das seções deste módulo do Livro Aberto de Matemática. Algumas delas requerem a construção de conceitos matemáticos mais complexos, como as séries uniformes, por exemplo. Outras até podem ser abordadas imediatamente, conforme a avaliação do professor sobre



suas turmas e condições, como as envolvendo planejamento financeiro e comportamento do consumidor. O importante nessa primeira seção é mostrar a diversidade dos temas, sem perder de vista as conexões entre os aspectos matemáticos e não matemáticos existentes nessas SEF.

Queremos dar um pontapé inicial. Buscamos convidar o aluno a perceber a diversidade de situações financeiras que serão tratadas, e como aspectos matemáticos e não matemáticos estarão conectados na análise dessas situações.

Organização em sala de aula Peça aos seus alunos para darem exemplos de Situações Financeiras e Econômicas (SEF) que eles já experimentaram. Em seguida, apresente as onze situações financeiras apresentadas nesta seção, tentando ampliar a visão de como tais situações são mais frequentes na vida das pessoas do que eles geralmente pensam, e da importância de se analisar bem para tomar decisões críticas e fundamentais (no sentido de testar a validade, avaliar a viabilidade, e escolher considerando possíveis consequências). Convide os estudantes a pesquisarem informações envolvendo SEF em sites, blogs, jornais, portais, revistas econômicas sobre situações envolvendo inflação, antes de abordar o tema, também pode ampliar o escopo de coisas a partir das quais poderão produzir significados. Convide seus alunos a pesquisarem se existem estratégias de educação financeira em curso na escola, e avaliem se elas consideram as demandas das pessoas e da região onde vivem. Convide seus alunos a criar a cultura de investigar os fundamentos e a razoabilidade das informações veiculadas nas mídias sociais de forma fundamentada.

Dificuldades previstas Esse tema faz um sucesso enorme nas aulas de matemática. Os alunos gostam de conversar sobre SEF pois fazem parte da vida deles. Estimule a participação, e procure aproveitar o interesse para trabalhar os conceitos matemáticos. O uso de calculadora pode ajudar, e muito, tanto para agilizar as contas, quanto para a realização de cálculos que demandam mais trabalho, incluindo as operações básicas com decimais, bem como as operações em problemas de aumentos sucessivos, potências com números racionais não inteiros de expoentes maiores que 3, logaritmos, dentre outras.

Sugestões gerais

Lembre-se que você pode abordar os temas de educação financeira (EFE) tais como: planejamento e orçamento financeiro pessoal e familiar, consumo, sustentabilidade, juros, inflação, tributos, previdência, investimentos, dentre outros, por meio de aulas específicas de educação financeira, caso sua escola as ofereça, ou abordar temas a partir dos conceitos e habilidades dentro do seu planejamento nas aulas de matemática. Aborde EF para ensinar matemática. Ensine matemática para a reflexão e tomada de decisão em situações financeiras.



1 EM QUE TERRENO ESTAMOS PISANDO?

No Brasil, as últimas décadas têm sido de grandes transformações sociais, econômicas, tecnológicas e demográficas. Por exemplo, entre 2002 e 2007, a classe média aumentou de 32 % para 47 % da população total, incorporando mais 23,5 milhões de pessoas. A pobreza extrema passou de 12 % para 5 % no período de 1992 a 2007. Segundo o Instituto de Pesquisa Econômica e Aplicada (IPEA), a desigualdade de renda, medida pelo índice de Gini, foi reduzida de 0,604 para 0,556. Já no Período de 2018 a 2022 voltou a subir, ampliando novamente a desigualdade no Brasil.

Temos também que a expectativa de vida aumentou de 51 anos em 1950 para quase 73 em 2008. Se os acréscimos na longevidade continuarem nesse ritmo, a expectativa de vida dos Brasileiros será em breve de 81 anos. Da mesma forma, a população com 40 anos ou mais aumentou significativamente (4,2 %) em relação a 2006, e houve um decréscimo de 0,7 % dos jovens (de 0 a 14 anos) no mesmo período.

O aumento do crédito cresceu entre 2002 e 2008 de 22 % para quase 40 % do Produto Interno Bruto (PIB). O controle da inflação e a estabilidade da moeda tem oferecido algumas oportunidades de planejamento financeiro e redução da perda do poder de compra, que não eram possíveis nas décadas de 80 e 90, por exemplo. Além disso, o aumento da oferta de produtos financeiros para financiamentos de veículos, eletrodomésticos, habitação, seguros, previdência, é uma realidade, gerando mais oportunidades e também mais complexidade e responsabilidades nas decisões a serem tomadas.

Analisando os últimos dez anos (2012 a 2022), novos desafios apareceram. Novas crises econômicas, seguidas da pandemia de um vírus que dizimou milhões de vidas e produziu efeitos econômicos e financeiros em escala global, afetando trabalho, renda e a segurança alimentar de bilhões de pessoas. Situações que interferem no presente e no futuro da tua família e da sociedade como um todo.

Esse material quer convidar você, jovem do Ensino Médio que faz parte de uma juventude na era da informação, mediada predominantemente pela tecnologia digital e mídias sociais, a pensar situações da vida em que você, sua família e toda a sociedade, para atender a algumas de suas necessidades, das mais básicas até as mais complexas, precisam lidar com operações envolvendo aquisição, uso, acúmulo e distribuição do dinheiro. Precisam lidar com temas econômicos e, principalmente com os impactos na tua vida, no teu bolso e no teu futuro, bem como na sociedade em que você vive. Vamos te convidar a pensar sobre sua situação financeira – o que pode ser pouco dinheiro para você é muito para milhões de pessoas, sobre poder aquisitivo, sobre condições de acesso à educação, sobre teu trabalho no futuro, sobre muita coisa envolvendo decisões que afetam, e muito, a sua vida.

Na prática, vamos falar de trabalho, renda, formação pessoal, emprego no século XXI, planejamento financeiro, orçamento pessoal e familiar, empréstimos, juros, financiamentos, crédito, inflação e poder compra, tributos, proteção ao risco, previdência. Tudo isso buscando pensar nas atitudes, direitos, deveres e responsabilidades e suas consequências.

A EF, em especial a que se volta para a sala de aula de matemática da educação básica, é uma oportunidade de convidar você e seus amigos a refletirem sobre todas essas questões financeiras e econômicas. Nesse texto, pretende-se construir uma educação financeira escolar que seja um convite à reflexão sobre o mundo em que vivemos e construímos, impulsionado por nossas escolhas, atitudes, responsabilidades e compromissos com um futuro sustentável e mais igualitário.

Para começarmos, convidamos você para uma longa viagem nesse mundo econômico financeiro, onde os aspectos matemáticos e os não matemáticos (comportamentais, sociais, políticos, econômicos e culturais) vão nos acompanhar.



Vamos partir de algumas Situações Econômico Financeiras (SEF), que fazem parte da vida do brasileiro, e analisaremos ao longo do livro. Você não precisa resolver os problemas e nem analisar as situações imediatamente. Calma, pois elas serão exploradas e investigadas conforme você for explorando o livro.

Situação 1: A inflação em um país foi de 8 % em 2017 e de 10 % em 2018. Os funcionários de uma empresa receberam uma proposta de aumento salarial de 18 % para corrigir essas perdas. Você aceitaria essa proposta? Ela realmente corrige as perdas acumuladas nos dois anos? Se você apresentasse uma contraproposta, qual seria o percentual de reajuste e como argumentaria para defendê-lo?

Situação 2: Uma pessoa começa a trabalhar aos 20 anos e pretende se aposentar aos 65 anos. Para ter uma renda complementar equivalente ao valor atual de R\$ 5 mil, por 15 anos (dos 65 aos 80 anos), quanto precisará abrir mão durante todo esse tempo para poder contribuir mensalmente durante os 45 anos, considerando uma taxa média de retorno igual à paga atualmente (2019) pela poupança? E se essa taxa fosse a de um título público pré-fixado? E se fosse a taxa média cobrada pelos quatro principais bancos atualmente instalados no Brasil?

Situação 3: Quais os motivos na sua opinião que justificam o crescimento apresentado na informação a seguir?

Investidores no Tesouro Direto crescem 36 % no primeiro semestre.

Programa de compra de títulos da dívida pública do governo teve 286.682 novos participantes entre janeiro e junho deste ano. (Redação da Veja, 2019).

Situação 4: A família Silva identificou que está gastando mais do que ganha, e por dois meses seguidos, seus integrantes gastaram em torno de 400 reais a mais do que ganharam, usando para isso juros do cheque especial com custo de 10 % ao mês. Quais atitudes a família Silva deveria tomar para resolver essa situação?

Situação 5: Em que aspectos a decisão tomada pelo Banco Central em 31 de julho de 2019 apresentada na informação a seguir influencia a sua vida e de sua família?

Banco Central surpreende e reduz juros básicos para 6 % ao ano

Pela primeira vez em um ano e quatro meses, o Banco Central (BC) diminuiu os juros básicos da economia. Por unanimidade, o Comitê de Política Monetária (Copom) reduziu a taxa Selic para 6 % ao ano, com corte de 0,5 ponto percentual. A decisão surpreendeu os analistas financeiros, que esperavam corte de 0,25 ponto. (Wellton Máximo, 2019).

Situação 6: Você compra um celular por 1.500,00 reais em dezembro de 2018, e após um ano, ele apresenta um defeito, cujo conserto está estimado em 300 reais. Você também pode trocar seu celular usado por um modelo novo parecido com o seu, pagando 900 reais. Qual decisão você tomaria? Qual o principal aspecto você levaria em consideração para tomar essa decisão? Quais os aspectos matemáticos que você levaria em consideração para tomar essa decisão? Quais aspectos ambientais você costuma levar em consideração para tomar essa decisão?

Situação 7: O Etanol é conhecido por causar menor impacto ambiental que a Gasolina. Entretanto, por questões de eficiência, o Etanol só é vantajoso financeiramente se seu preço corresponder a até 70 % do preço da gasolina, como acontece na tabela a seguir:

■ Gasolina: R\$ 2,80/L

■ Etanol: R\$ 3,00/L



Sabendo disso, responda:

- Se o preço do Etanol fosse R\$ 2,80/L, qual seria sua escolha? E se fosse R\$ 3,00/L?
- Até quanto você estaria disposto a pagar pelo Etanol em prol do meio ambiente?

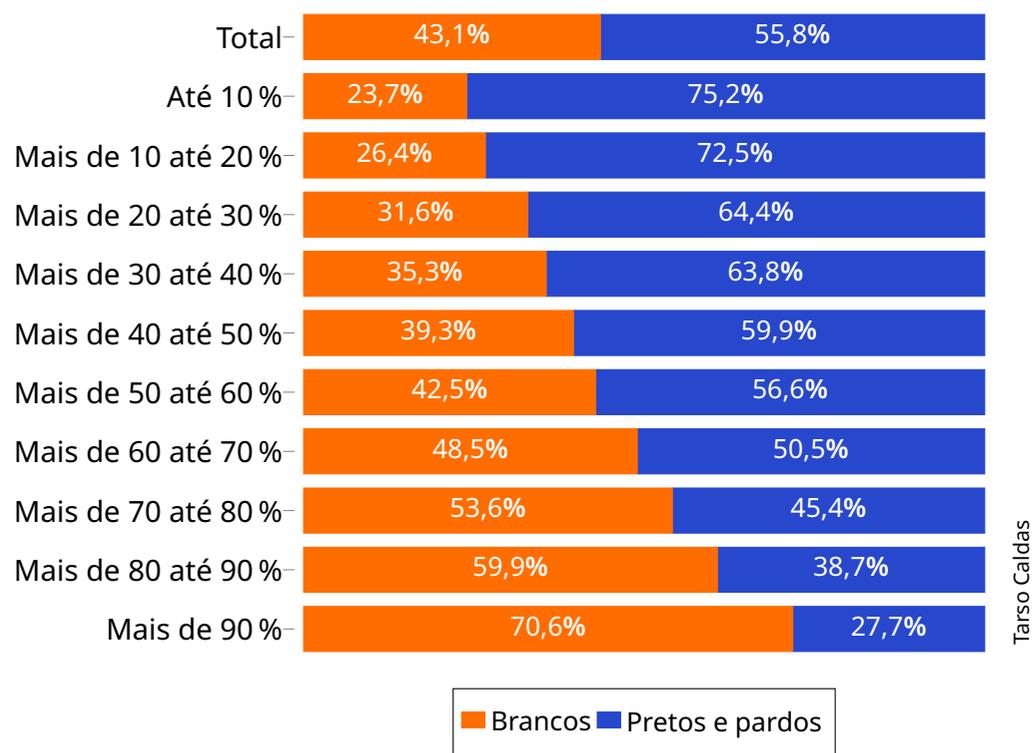
Situação 8: Você tem dinheiro aplicado na poupança, e pretende comprar um produto com esse dinheiro. Indo à loja, tem duas opções:

- comprar à vista, com 5% de desconto,
- ou a prazo, no cartão, em 12 prestações mensais iguais, sem juros.

Qual opção você escolheria? Qual a opção mais vantajosa do ponto de vista exclusivamente financeiro? Por quê?

Situação 9: A meritocracia tem sido discutida de forma mais intensa ultimamente. Considere as informações apresentadas no gráfico a seguir.

Figura 1: Distribuição da população segundo as classes de percentual de pessoas em ordem crescente de rendimento domiciliar *per capita* (%).



Dados do IBGE (2019a).

- Qual a informação que mais lhe chama atenção nesse gráfico?
- Como você interpretaria esse gráfico?
- Estatisticamente, como você interpretaria a última faixa do gráfico, no contexto da desigualdade salarial em função das questões raciais no Brasil?



Situação 10: Leia o trecho de reportagem à seguir.

Sua calça jeans gastou mais de 5 mil litros de água para ser produzida: entenda

Só o plantio de algodão gasta 4.247 litros de água para produzir apenas uma peça do vestuário (Carina Brito, 2019).

Quantas calças jeans você tem em seu guarda roupa? Qual a relação entre consumo e sustentabilidade na sua família?

Situação 11: Uma família precisa escolher a forma de parcelamento de um bem muito necessário. Após uma pesquisa na internet, o melhor preço à vista, para ser pago no boleto bancário, encontrado foi o seguinte.

Pague com Boleto Bancário

Valor total do boleto: R\$ 829,45

IMPORTANTE

- O prazo para pagamento do seu boleto é de 3 dias, e o prazo de entrega do produto começa a ser contado a partir da confirmação de pagamento pela instituição bancária.

Concluir Compra

Como a família não possui, atualmente, recursos para comprar à vista, precisam comprar parcelado. Eles avaliam dois tipos de parcelamento disponíveis no site dessa mesma empresa.

Tabela 1: Parcelamento por carnê digital.

Número de parcelas	Valor da parcela (R\$)	Juros (% a.m.)
1	906,65	3,99
2	462,20	3,99
3	314,10	3,99
4	240,10	3,99
5	195,75	3,99
6	166,25	3,99
7	145,20	3,99
8	129,40	3,99
9	117,20	3,99
10	107,40	3,99
11	99,45	3,99
12	92,80	3,99

Tabela 2: Parcelamento por cartão de crédito.

Número de parcelas	Valor da parcela (R\$)	Juros (% a.m.)
1	829,45	—
2	435,95	—
3	290,63	—
4	217,98	—
5	174,38	—
6	145,32	—
7	145,56	—
8	115,41	1,29
9	99,32	0,50
10	89,61	0,50
11	85,53	1,29
12	78,89	1,29



- Se a família puder pagar uma prestação de até R\$ 125,00 mensais, qual o parcelamento mais econômico?
- O valor da prestação deve ser o único critério nessa escolha? Justifique.
- O que acontece nos dois casos em caso de inadimplência?

Essas situações são apenas algumas das quais iremos abordar ao longo das várias seções deste módulo de Educação Financeira do Livro Aberto. Observe que temos aspectos matemáticos nelas, mas também temos outros aspectos que não são matemáticos, tais como os financeiros, comportamentais, culturais, econômicos, sociais, políticos, ambientais dentre outros. Nós vamos começar por duas das situações financeiras apresentadas.

Explorando

Em que Terreno Estamos Pisando?

Atividade 1

Negociando Reajustes

A inflação em um país foi de 8% em 2017 e de 10% em 2018. Os funcionários de uma empresa receberam uma proposta de aumento salarial de 18% para corrigir essas perdas. Ela realmente corrige as perdas acumuladas pela inflação nos dois anos? Você aceitaria essa proposta? Se você não aceitasse essa proposta, qual a contraproposta que você apresentaria, e como argumentaria para defendê-la?

Atividade 2

Cobertor Curto

A família Silva identificou que está gastando mais do que ganha, e para isso está usando o cheque especial, que custa 10% ao mês, sobre o saldo devedor. O orçamento doméstico simplificado da família em janeiro e fevereiro desse ano estão representados na tabela a seguir.

Tabela 3: Orçamento da família Silva.

Receitas		Despesas	
Descrição	Valor (R\$)	Descrição	Valor (R\$)
Salário Pai	1.800,00	Alimentação	1.100,00
Salário Mãe	2.200,00	Luz	180,00
		Água	80,00
		Telefone	450,00
		Aluguel	1.200,00
		Cartão de Crédito	750,00
		Lazer	300,00
		Transporte	440,00
Total	4.000,00	Total	4.500,00

Objetivos Específicos

Negociando reajustes

- Resolver problemas relacionados a percentuais sucessivos e determinação de taxas acumuladas, no contexto da educação financeira.
- Analisar e tomar decisões em situações econômico-financeiras que envolvam aumentos e/ou descontos sucessivos, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos.

Solução

Negociando reajustes

A solução comentada será apresentada no próprio texto, dentro do tópico Organizando: *Uma Concepção de Educação Financeira*.

Nota 1

Objetivos Específicos

Cobertor curto

- Aplicar conceitos matemáticos na construção de orçamentos e planejamentos financeiros (pessoal ou familiar).
- habilidade Analisar e tomar decisões em SEF a partir de orçamentos e planejamentos financeiros, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos.



Solução

Cobertor curto

A solução comentada será apresentada no próprio texto, dentro do Organizando: *Uma Concepção de Educação Financeira*.

Nota 2

- Considerando que eles fiquem devendo os R\$ 500,00 durante 15 dias ao Banco, ou seja, peguem R\$ 500,00 emprestado usando o crédito do cheque especial por 15 dias, quantos reais, aproximadamente, eles terão que economizar no mês seguinte para equilibrar o orçamento?
- Que sugestões você daria para ajudar a família Silva a resolver esse problema no orçamento?

Organizando

Uma Concepção de Educação Financeira

Observe que na [Atividade 1](#), somos inclinados a pensar que a inflação acumulada nos dois anos é a soma das inflações em cada ano. A ideia mais simples e usual é recorrer ao processo aditivo. Nosso cérebro adora atalhos e gosta de dar respostas rápidas a problemas numéricos (D. Kahneman, 2012). Nesse caso, esse atalho nos leva a um engano, podendo ter como consequência aceitar um reajuste que não repõe a inflação acumulada, ou seja, que não mantém o poder de compra desse salário. Assim, não compreender os aspectos matemáticos dessa situação pode levar a uma redução do poder de compra de uma família. Quantas pessoas você conhece que realmente acham que os 18 % de reajuste corrigiriam a inflação acumulada nos dois anos? Mas, por que não corrige?

Consideremos um produto que custava 100 reais no início no final de 2017, e que aumente exatamente conforme a inflação apresentada. O que acontece com esse preço após os dois aumentos sucessivos? Vamos usar uma representação, que chamaremos de representação temporal, para nos ajudar a entender o a transformação do preço nesses dois anos.

$$100,00 \xrightarrow[8\%]{2017} 108,00 \xrightarrow[10\%]{2018} 118,80$$

Essa representação apenas registra que o produto que custava R\$ 100,00, no início de 2017, passou a custar um ano depois: $100,00 + 8\% \times 100,00 = \text{R\$ } 108,00$. E que esses R\$ 108,00, do início de 2018 passaram a custar $108,00 + 10\% \times 108,00 = \text{R\$ } 118,80$ no final de 2018.

Logo, o preço passou de 100,00 para 118,80 reais, o que resulta em uma variação de 18,80 %. Assim, um reajuste de 18 % não corrige as perdas pela inflação, ou seja, um reajuste de 18 % não vai ser suficiente para que se compre a mesma quantidade de produtos, supondo que aumentassem os 18,80 % de inflação no período. Nesse caso, teríamos uma redução do poder de compra. Para manter o poder de compra, tomando como base a inflação, os salários deveriam ser reajustados em 18,8 %, e não em 18 % como muitos poderiam pensar.

Para analisar essa situação, também poderíamos pensar assim:

Uma quantia, ao ser aumentada de uma taxa i , fica multiplicada por $1 + i$

Usando essa ideia, o preço fica multiplicado por 1,08 quando aumenta de 8 %, e em seguida por 1,10 quando aumenta 10 %, sendo, portanto multiplicado por $1,10 \times 1,08 = 1,188$. Logo o aumento foi de 18,8 % em dois anos.

De uma maneira geral, uma quantia C , ao variar de uma taxa i , transforma-se em:

$$C + iC = C \cdot (1 + i).$$

Esse fator é chamado de fator de atualização. Observe que esse fator atualiza, nesse contexto, os preços anuais.



Há uma questão financeira relevante aqui. Observe que o valor dos preços, diante de uma inflação diferente de zero, se transforma no tempo. De fato, a inflação é um dos fatores que modificam o valor de uma quantia no tempo, assim como o câmbio, os juros, a demanda, a geração de valor por meio de investimentos, dentre outros.

Mas há outros aspectos importantes que podem ser levados em consideração nessa situação, além dos aspectos matemáticos tratados até aqui. As condições econômicas tais como desemprego, queda nas vendas, condições climáticas, dentre outras podem afetar essa negociação, gerando acordos entre patrões e empregados abaixo dos 18,8%, que seria o mínimo necessário para manter o poder de compra considerando essa inflação acumulada.

Outro aspecto é que um índice de inflação sempre considera um conjunto particular de produtos e serviços, alguns dos quais podem não fazer parte da realidade de uma pessoa ou não ter o mesmo peso. Qual é a sua inflação, baseado no teu perfil de consumo? Esse reajuste calculado baseado nessa inflação acumulada corrigiria a tua inflação? Voltaremos a discutir essa temática de forma mais detalhada na [Seção 7](#).



Para refletir

Entenda que todas essas questões já apontam para uma natureza bem especial das situações econômico-financeiras que abordaremos neste módulo: os aspectos matemáticos estarão conectados aos aspectos não matemáticos para nos ajudar a investigar, refletir e tomar decisões.

Na educação financeira presente neste livro, queremos olhar para cada situação por diversos pontos de vista, buscando sempre usar a matemática articulada com outras áreas do conhecimento para ampliar nossa compreensão daquilo que estamos analisando.

Já na [Atividade 2](#), é muito comum pensar que a economia a ser realizada no mês seguinte é de R\$ 500,00. Ou ainda, que a economia para o mês seguinte é de apenas R\$ 25,00 (um valor aproximado para os juros que serão pagos).

Qual a economia a ser realizada no mês seguinte ao apresentado? Qual o valor máximo que eles podem gastar para equilibrar o orçamento da família no mês seguinte?

A resposta é de aproximadamente R\$ 1.025,00. Isso mesmo! Pois eles precisam economizar os R\$ 500,00 do mês anterior mais os R\$ 500,00 do mês em questão, pois o orçamento está desequilibrado em R\$ 500,00, e ainda pagar os juros de R\$ 25,00. Ou seja, ao invés de terem os 4000 reais a disposição, terão apenas $4.000,00 - 1.025,00 = R\$ 2.975,00$. Um preço que se paga por gastar mais do que se ganha.

Isso vai demandar um esforço dos integrantes da família, exigindo sacrifícios durante algum tempo. Essa família precisará redefinir prioridades, estabelecer metas claras, mudar comportamentos, e ter uma atitude que costuma ser considerada bem desafiadora: manter a disciplina para cumprir o que foi planejado. Além dos aspectos matemáticos, nos quais a família precisa se apoiar para equilibrar o orçamento, há aspectos comportamentais que estarão presentes nesse processo.

Essa articulação entre diferentes aspectos é uma das características do que vamos chamar de Educação Financeira. *Mas o que é Educação Financeira?*

A definição que mais tem sido usada no Brasil é a da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), apresentada em 2005, que diz que Educação Financeira é o processo pelo qual as pessoas melhoram seus conhecimentos financeiros, sua compreensão do mercado e seu nível de informação sobre produtos e serviços de consumo, crédito, investimento, seguros, previdência dentre outros, evitando armadilhas e sabendo como e quando procurar ajuda, que



lhes permitam planejar e fazer escolhas de curto, médio e longo prazo que visem e efetivamente produzam o seu bem estar e o de sua família.

Mas será que essa definição contempla todas as dimensões que precisamos para sermos educados financeiramente? Entendemos que não! Há outras questões que precisam ser levadas em consideração na visão sobre como lidamos com o nosso consumo, aquisição, utilização, poupança e distribuição do dinheiro? Vamos mostrar que sim!

Nesse texto, usamos uma outra concepção de Educação Financeira, mais adequada aos propósitos da Educação Básica, que passaremos a chamar de **Educação Financeira em Contextos Escolares (EFCE ou EFE)**.

A partir de agora, vamos então chamar de EFCE ao processo de educar a partir de um conjunto de estratégias e ações desenvolvidas para o contexto escolar, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos, didáticos e multidisciplinares, que *convide os estudantes* a refletirem sobre situações econômicas e financeiras relacionadas com a aquisição, planejamento, utilização e redistribuição do dinheiro, de forma crítica e fundamentada, e também sobre possíveis *consequências de suas decisões e atitudes* frente às suas demandas, necessidades, projetos e realizações em sua vida pessoal, familiar e da sociedade em que vivem.

Abordaremos temas como renda e trabalho, planejamento, orçamento e gestão financeira, consumo, cultura e sustentabilidade; o valor do dinheiro no tempo e suas causas: inflação, câmbio, juros e investimentos; equivalência de capitais e de taxas; tributos e contribuições; previdência e proteção, buscando produzir conexões didáticas com a Educação Básica por meio do ensino de matemática, convidando os estudantes a refletirem sobre possíveis consequências de suas decisões e atitudes frente às suas demandas, necessidades, projetos e realizações em sua vida pessoal, familiar e da sociedade em que vivem.

Com esse livro, queremos contribuir para que você seja educado financeiramente, isto é, que seja capaz de:

- a) Refletir sobre situações financeiras e econômicas relacionadas a aquisição, utilização, distribuição e acumulação do dinheiro, para satisfação de suas necessidades no curto, médio e longo prazo, por meio da produção de Ambientes de Educação Financeira Escolar.
- b) Refletir sobre suas atitudes, opções, escolhas e as possíveis consequências dessas escolhas, em situações de renda, consumo, crédito, poupança/investimento, risco e proteção, de modo ético e sustentável.
- c) Investigar, analisar, fazer julgamentos fundamentados, ter posições críticas e tomar decisões fundamentadas sobre questões financeiras que envolvam sua vida pessoal, familiar e da sociedade em que vivem.



Você Sabia?

A palavra "economia" foi cunhada pelo filósofo Xenofante na Grécia Antiga. Combinando oikos, que significa "casa de família," "agregado familiar," com nomos, que significa regras ou normas, ele inventou a arte de gerir um lar, e isso não poderia ser mais relevante nos dias de hoje. Economia tem a ver com a gestão de recursos individuais e coletivos, incluindo o planeta, uma vez que a atividade humana, está colocando uma pressão sem precedentes sobre os sistemas geradores de vida na Terra (K. Raworth & G. Schlesinger, 2019).

Figura 2: Kate Raworth.





Você Sabia?

Apesar das iniciativas nos EUA com o National Endowment for Financial Education (NEFE), na década de 80, e o *JumpStart Coalition for Personal Financial Literacy*, na década de 90, poderem ser consideradas os movimentos precursores das ações de Educação Financeira em grande escala, foi a OCDE em 2003, dois anos após a queda das torres do World Trade Center e seus profundos desdobramentos políticos e econômicos no mundo, quem produziu o primeiro grande estudo sobre EF em nível Internacional, intitulado *Melhoria da literacia financeira: análise das questões e políticas*, do qual veio o documento *Recomendações sobre os princípios e boas práticas para a Educação Financeira e consciência*, que passou a ser referência mundial, presente em vários programas e documentos que fundamentam as iniciativas de Educação Financeira dos países que optaram por seguir tais recomendações, conforme apontam Muniz Jr. e Jurkiewicz (2016b) e Amarildo Melchiades da Silva e Arthur Belford Powell (2013).

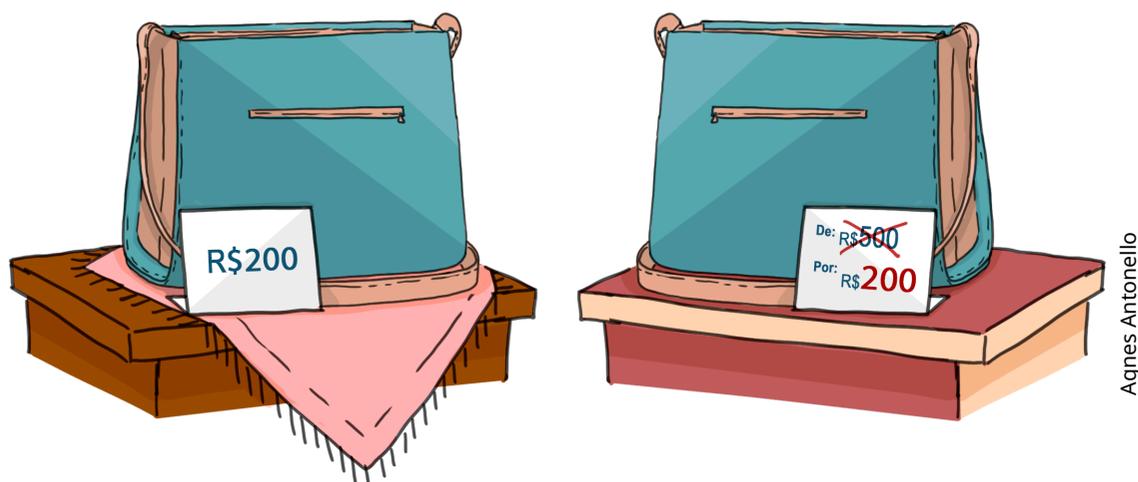
Praticando

Ampliando a visão sobre Educação Financeira

Atividade 3

Armadilha ou oportunidade?

Observe a seguinte bolsa sendo divulgada em duas lojas diferentes:



- Qual loja você acredita que atrairia mais compradores? Por quê?
- Em qual loja você estaria mais propenso a pagar os R\$ 200,00 pela bolsa?

Atividade 4

O desemprego entre os jovens no Brasil

Um a cada quatro jovens no Brasil está desempregado, numa realidade que se assemelha aos índices registrados no Norte da África e no Oriente Médio. A taxa está sendo divulgada nesta segunda-feira pela Organização Internacional do Trabalho (OIT), que destaca como a situação na economia brasileira afeta de forma ainda mais severa aos jovens.

Objetivos Específicos

Armadilha ou oportunidade?

- Resolver problemas relacionados a aumentos e/ou descontos no contexto da educação financeira.
- Analisar e tomar decisões em situações econômico-financeiras que envolvam aumentos e/ou descontos, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos.

Solução

Armadilha ou oportunidade?

- A loja que atrairia mais compradores poderia ser a loja B, pois o consumidor poderia ser levado a pensar que estivesse tendo vantagem por conta do desconto de mais da metade do valor da bolsa. A sensação de ganho geralmente costuma atrair as pessoas. Então a loja B tende a atrair mais compradores.
- A segunda pergunta é pessoal, sendo muito importante deixar os alunos falarem.

Nota 3

Objetivos Específicos

O desemprego entre os jovens no Brasil

- Interpretar criticamente situações econômicas, sociais que envolvam aumentos e/ou descontos percentuais, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos.
- Resolver problemas relacionados a aumentos e/ou descontos percentuais no contexto da educação financeira.



Solução

O desemprego entre os jovens no Brasil

- a) O título da matéria aponta para o problema social do desemprego. Quando a economia não vai bem, ou seja, quando as famílias não conseguem comprar, e as empresas produzirem, os empregos ficam em baixa, afetando de forma especial os jovens, devido geralmente à falta de experiência ou formação.
- b) O aumento em pontos percentuais da taxa de 2013 para 2019 foi de 12,1 %. E o aumento percentual da taxa de 2013 para 2019 foi de aproximadamente 77,07 %.
- c) No ano de 2020 os jovens ainda enfrentam o problema social do desemprego como no ano de 2018. Então a imagem ainda continua atual e representa de fato o problema social da matéria.

Nota 4

Objetivos Específicos

A pandemia dos preços

- Interpretar criticamente situações econômicas, sociais que envolvam aumentos e/ou descontos percentuais, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos.
- Resolver problemas relacionados a aumentos e/ou descontos percentuais, incluindo os sucessivos, no contexto da educação financeira.

Solução

A pandemia dos preços

- a) Resposta pessoal. Para famílias de menor poder aquisitivo espera-se que o impacto tenha sido maior, principalmente com o aumento de consumo com mais pessoas ficando em casa.
- b) De 15 para 40 a variação percentual foi de $\frac{40}{15-1} = 166,7\%$
- c) Há várias razões. Aqui sugerimos uma parceria com o professor de Geografia. Mas o mais recomendado é uma boa pesquisa em matérias nos principais jornais do país, pela internet. Há uma grande conjugação de fatores que contribuiu, em especial, para o aumento de preço dos alimentos, segundo

Em 2013, o desemprego atingia 15,7% dos jovens de 14 a 24 anos no Brasil. Em 2019, a média subiu para 27,8%. Para 2020 e 2021, a previsão é de que ela continue elevada, ainda que caindo para 26,9% e 26,5%, respectivamente (Jamil Chade, 2020).



Marcelo Justo/UOL

Figura 3: SÃO PAULO, SP, BRASIL, 06/08/2018, 10h00. Especial desemprego: Pessoas em busca de uma vaga de emprego formam filas nas proximidades do Sindicato dos Comerciários de São Paulo, no Vale do Anhangabaú, na região central de SP. Devido ao dia chuvoso, as filas se acumulavam embaixo do Viaduto do Chá. O sindicato organiza o 2º Mutirão do Emprego, com o objetivo é oferecer ainda mais oportunidades de trabalho, em postos que tenham remuneração maior.

- a) O título da matéria aponta para um problema social. Qual o principal problema e por que ele acontece no Brasil?
- b) Qual foi o aumento, em pontos percentuais, da taxa de desemprego entre os jovens de 2013 para 2019? E qual foi o aumento percentual dessa taxa de 2013 para 2019? Considere que a população total de jovens seja a mesma nos dois anos.
- c) A imagem é de 2018. A matéria é de março de 2020. Há algum problema nessa diferença entre datas, considerando a mensagem que a matéria tenta transmitir?

Atividade 5

A Pandemia dos preços

Durante a pandemia, em 2020, observamos um aumento significativo no preço de vários alimentos e de alguns produtos importados. Isso impactou a vida de pessoas de diferentes classes sociais. Leia atentamente as informações a seguir.

Arroz chega a custar R\$ 40,00, e setor diz que preço deve continuar em alta.

Essencial na mesa da família brasileira, o preço do arroz disparou nos supermercados brasileiros, sobretudo nas últimas semanas. Um pacote de cinco quilos, normalmente vendido a cerca de R\$ 15,00, agora chega a custar R\$ 40,00 (Bruno Cirillo, 2020).





Antony trivet/ Unsplash

- a) Qual o impacto da alta dos preços dos alimentos de uma maneira geral no orçamento da sua família? Explique quais as principais mudanças realizadas no teu orçamento familiar diante da alta dos preços.
- b) Qual foi a variação percentual sofrida pelo preço do arroz, segundo os dados apresentados na matéria?
- c) Por que o preço do arroz aumentou tanto?
- d) Considerando que o preço atual de R\$ 40,00 sofra uma redução de 5% por semana, na comparação com a semana anterior, qual seria o novo preço após duas semanas sucessivas, partindo do preço atual?
- e) Se esse padrão de queda se mantivesse, após quantas semanas, no mínimo, o preço voltaria aos R\$ 15,00?

os especialistas. Em especial, o preço do arroz tem sido influenciado por:

■ Alguns dos principais exportadores mundiais de arroz, restringiram suas exportações. Se a oferta mundial diminui, o preço tende a aumentar, modificando o ponto de equilíbrio.

■ Pandemia. Influencia na medida que alterou o consumo desse tipo de item nas famílias. Mais pessoas comendo em casa, e comendo mais, gera maior demanda por alguns tipos de alimentos. E demanda altera o ponto de equilíbrio.

■ Desvalorização do real frente ao dólar. Com isso o preço aumenta, aumentando o custo de quem vende para o consumidor final.

■ Produtores do Brasil, diante do preço maior lá fora, preferem vender mais caro para fora. Logo o preço aqui vai subir. (Matéria hoje na Folha de SP mostra isso, com depoimentos dos próprios produtores).

■ Redução do número de produtores de arroz no Brasil, em função de um retorno mais baixo, nos últimos anos, quando comparado a outros alimentos. Influencia na oferta. (Matéria hoje na Folha de SP mostra isso).

■ Redução do papel da Companhia Nacional de Abastecimento na regulação dos estoques de forma intencional pelo atual governo.

d) $P = 40 \times (1 - 5\%) \times (1 - 5\%) = 40 \times 0,95^2 = 36,10$. Logo, o preço após duas semanas, nessas condições, seria de R\$ 36,10.

e) É possível obter uma estimativa do tempo mínimo para o preço voltar aos R\$ 15,00 modelando o problema por meio de uma função exponencial, recaindo em uma equação exponencial, que para ser resolvida demandaria usualmente os logaritmos, conforme a modelagem matemática a seguir:

$$\begin{aligned} 40 \cdot 0,95^t &= 15 \\ 0,95^t &= \frac{15}{40} \\ t &= \frac{\log 15 - \log 40}{\log 95 - \log 100} \\ t &\cong 19,12 \text{ semanas} \end{aligned}$$

Nota 5



PARA O PROFESSOR: ORÇAMENTO E PLANEJAMENTO FINANCEIRO

Objetivo geral

- Compreender, analisar e elaborar orçamentos pessoal e/ou familiar, a partir de noções básicas.
- Conceitos abordados: orçamento e planejamento; média aritmética simples; porcentagem; através das habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Habilidades da BNCC

EM13MAT101 Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

EM13MAT203 Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

Recomendações para o professor

Organização em sala de aula Esta seção pode ser trabalhada em turmas do Ensino Fundamental e do Médio. Começar com a pergunta “quanto você custa mensalmente?” pode ser um caminho interessante, porque convida o aluno a pensar nas mais variadas categorias de despesas, no valor do trabalho, na adequação da renda às despesas. Coletar informações sobre o orçamento das famílias exige cuidado para não causar constrangimentos, mas precisa ser discutida de forma responsável e adequada à idade.

Dificuldade previstas Em relação aos aspectos matemáticos, os conceitos são simples pois envolvem as quatro operações elementares com números racionais e porcentagem. O uso da calculadora pode ajudar e muito nessa abordagem. Ao abordar conceitos da Estatística tais como média, média móvel, série histórica (despesas com luz, gás, telefone), pode ser necessário uma revisão. Todavia, tem enorme potencial de aplicação e de compreensão das regularidades e sazonalidades das receitas e despesas pessoais e familiares.

Sugestões gerais Uma possibilidade para se abordar os temas orçamento e planejamento financeiros é aproveitar a programação normal de aulas, quando estas forem sobre assuntos relacionados, tais como porcentagem, razão, proporção, operações com números racionais, média, moda, mediana, média móvel, construção e análise de gráficos, etc. Tudo isso dentro da disponibilidade de tempo e das condições do professor. Busque sempre levar em consideração o contexto social e econômico dos estudantes na abordagem desse tema. Lidar com orçamentos e planejamentos financeiros que apresentem consumos totalmente irreais para os estudantes naquele momento da vida, pode prejudicar a compreensão e o engajamento deles, nos Ambientes de EFE produzidos.

Esse é um ótimo tema para se usar ferramentas digitais para organizar e analisar dados, em especial as planilhas eletrônicas. A construção de planilhas demanda conceitos matemáticos na programação de várias células, na relação funcional entre variáveis, o que por sua vez pode ajudar a entender SEF e a desenvolver habilidades financeiras de gestão.

Enriquecimento da discussão Sugerimos a leitura do livro Zentgraf, R. (2015). *Preciso Me Planejar!* SOU.L e também o podcast “CBN Dinheiro”, apresentado por Marcelo d’Agosto.



2 ORÇAMENTO E PLANEJAMENTO FINANCEIRO

Quantos cursos você planeja fazer esse ano? Quantos livros pretende ler? Onde quer estar profissionalmente daqui a 5 anos? Qual a sua meta pessoal para melhorar a saúde: academia, futebol, vôlei, ou outra atividade física? Quantas horas de estudo serão necessárias para ingressar na graduação daquela Universidade Pública que você tanto deseja? Quantas pessoas quer influenciar e ajudar na próxima semana? Participará de algum projeto ou ação social, de maneira voluntária, doando seu tempo e sua atenção a alguém que ama, ou simplesmente não conhece, mas que precisa? Para onde vai viajar, e como vai conseguir fazer isso? De quanto dinheiro vai precisar para realizar seus desejos?

O ser humano é movido por desejos, buscando atender necessidades das mais variadas. Mas você pensa na relevância que seus desejos têm para sua vida? Qual o tamanho da sua vontade? Ela é compatível com o tamanho dos teus sonhos e projetos? E qual é o tamanho da sua vontade para planejar as ações e realizar ou ajustar aquilo que foi planejado para para atingir seus sonhos?

Uma das oportunidades que a Educação Financeira oferece às pessoas é refletir sobre orçamento e planejamento financeiros, visando a realização de desejos em diversas áreas da vida. Entenda que Planejamento Financeiro não é mágica. Na prática, significa reunir conhecimentos e técnicas que levam a decisões mais racionais de consumo, investimento, poupança e financiamento, garantindo como resultado uma vida confortável e sem atropelos de última hora.

Queremos convidar você a refletir e entender que todo mês há receitas (entradas de recursos) e despesas (saídas de recursos) que precisam ser organizadas e pensadas. Entender esse fluxo de receitas e despesas pode ajudar as pessoas nas decisões que precisarão tomar para que os sonhos e projetos ganhem alguma chance de serem realizados.

Para a maioria das pessoas, sem planejamento, estratégia, sacrifícios e esperas, essa chance pode ser muito pequena. E a matemática é um dos aspectos que podem ajudar, e muito, nesse planejamento e, conseqüentemente, na definição e realização de metas de curto, médio e longo prazos. Vamos refletir nesta seção sobre orçamento e planejamento financeiro, nas perspectivas pessoal e familiar, buscando construir novas formas de pensar projetos e sonhos, e ter atitudes que sejam compatíveis com eles.

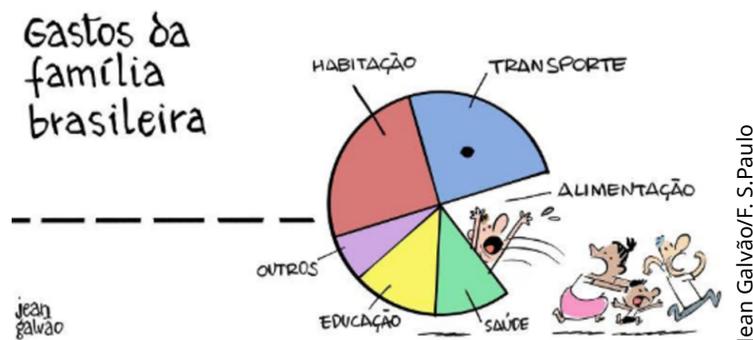
Explorando

Orçamento e Planejamento Financeiro

Atividade 6

Como gasto o meu dinheiro?

Analise a charge a seguir, publicada em 06/10/2019, na Folha de São Paulo.



Objetivos Específicos

Como gasto o meu dinheiro?

- Investigar situações financeiras que envolvem orçamento, planejamento e gestão financeira, tanto a pessoal quanto a familiar.
- Resolver problemas relacionados ao orçamento e planejamento financeiro.

Solução

Como gasto o meu dinheiro?

- Resposta pessoal.
- Resposta pessoal. Veja o comentário sobre a intenção dessa pergunta
- Resposta pessoal. Veja a sugestão de variação da atividade proposta.

d) Resposta pessoal. Observe que essa atividade pode ser perfeitamente usada no Ensino Fundamental, talvez a partir do sétimo ano.

Nota 6

Objetivos Específicos

Crise à vista: hora de apertar o cinto!

- Investigar situações financeiras que envolvem orçamento, planejamento e gestão financeira, tanto a pessoal quanto a familiar.
- Construir propostas e soluções alternativas como apoio para a tomada de decisão em situações envolvendo orçamentos e planejamentos financeiros, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos.

Sugestões e discussões

Crise à vista: hora de apertar o cinto!

Nessa atividade convidamos o aluno a pensar numa possível redução abrupta da renda, diante da redução de salário e/ou demissão de um dos membros da família. O contexto é da crise gerada pela Pandemia.

A atividade é simples nos dados, mas pode ser bem complexa na construção de soluções, uma vez que lidar com uma redução de 40% nas receitas seria um enorme desafio para grande parte das famílias brasileiras. Queremos convidar o estudante a elencar as necessidades mais básicas e prioritárias na opinião deles.

Seria possível pensar em soluções sem identificar quais são os principais gastos da família? Ou seja, seria possível dar soluções sem fazer um orçamento familiar para reestruturar um planejamento financeiro?

Solução

Crise à vista: hora de apertar o cinto!

Resposta pessoal. Pergunta aberta.

- a) Qual a principal mensagem que essa charge tenta transmitir?
- b) Habitação e transporte costumam ter o mesmo peso no orçamento da sua família?
- c) Quanto dinheiro sua família investe mensalmente na sua educação?
- d) Estime o percentual que a alimentação representa nos gastos da família de acordo com o gráfico apresentado.

Na atividade anterior, o gráfico apresentou várias informações a respeito do orçamento de uma família. Apesar da ideia principal que o artista tentou passar ser o peso da alimentação no consumo da família, que em muitos casos “come” a maior parte dos salários das pessoas, temos ali outras fontes de gastos, tais como habitação, transporte, educação, vestuário. Mas tão importante quanto trabalhar para melhorar nossa renda, é identificar como gastamos nosso dinheiro (diagnóstico), para que possamos decidir o que queremos e podemos fazer com os nossos recursos (planejamento).

Atividade 7

Crise à vista: hora de apertar o cinto!

Com a crise econômica existente no país e também no Estado do Rio de Janeiro, muitas pessoas ficaram desempregadas. Imagine que sua família tivesse uma renda de R\$ 5.000,00, e devido à crise diminuísse para R\$ 3.000,00. O que você sugeriria para seus responsáveis em relação a essa nova realidade?

Organizando

Diagnóstico e Plano de Ação

Veja que um *orçamento financeiro pessoal* é como um diagnóstico, ou seja, um detalhamento das receitas e despesas de uma ou mais pessoas, em um determinado intervalo de tempo (geralmente mensal), para se identificar de onde vem e para onde vai o dinheiro da família. Da família. Mesmo que você não ganhe, com certeza você gasta. Por isso deve ter responsabilidades e deveres nessa história. Deve aprender a pensar nisso desde cedo, e aos poucos.

Assim, um orçamento envolve tanto a identificação das fontes de entrada de dinheiro, tais como salários, horas extras, “bicos”, mesadas, presentes em dinheiro, dentre outras, bem como as de saída, geralmente categorizadas em despesas com lazer, alimentação, moradia, vestuário, etc. Tabelas ou aplicativos ajudam na elaboração de um orçamento doméstico.

A partir de um orçamento, ou seja, do diagnóstico das receitas e despesas, pode-se avaliar como cada pessoa ou até mesmo toda a família está gastando o dinheiro, e buscar ajustar as despesas. Pode-se também pensar e agir para aumentar as receitas, com algum trabalho extra, por exemplo, para se atingir alguns objetivos. O objetivo em um mês pode ser simplesmente não gastar mais do que ganha. Em outros meses, pode ser gastar menos do que ganha, para com o que sobra realizar um sonho, fazer uma viagem, ou quem sabe para comprar algum bem que seja importante para a família, como por exemplo uma casa própria no futuro. Assim, chamamos de planejamento financeiro a um conjunto de ações e atitudes que visam organizar a vida financeira, a partir de objetivos bem definidos.

Nessa visão, *planejamento financeiro* se refere a um plano de ações, isto é, ao que quero, posso e devo fazer diante de um orçamento para se atingir determinados objetivos traçados por uma ou mais pessoas. Obviamente o planejamento financeiro pode começar com uma decisão



de reorganizar as finanças ou atingir um objetivo específico – como poupar dinheiro para a realização de um curso, para empreender um pequeno negócio, para a cirurgia de alguém da família, ou para a compra de um bem (carro, casa, etc) – a partir do qual segue-se um orçamento que vai ajudar a mapear a situação financeira, para que o planejamento possa ser, de fato, executado, posto em prática.



Você Sabia?

Boa parte das dificuldades para planejar as finanças tem origem em questões comportamentais, como o consumo excessivo. Para pessoas que compram demais, por exemplo, o esforço é muito mais no campo da atitude do que no da técnica de planejamento. Mas não é só o comportamento que justifica toda a questão. Tem muita gente que não compreende corretamente os fundamentos do ambiente econômico, ficando assim à mercê de situações que são, no mínimo, desfavoráveis (R. Zentgraf, 2015).



Assim temos duas ideias que se complementam, como que dois lados de uma mesma moeda. Enquanto o orçamento ajuda a fazer um mapa das finanças pessoais, identificando problemas e situações complicadas, o planejamento é fundamental para se criar soluções e/ou estabelecer novas metas.

Assim, enquanto um diagnóstico pode ajudar o indivíduo, e/ou sua família, a entender o movimento do dinheiro e dos possíveis desperdícios, o planejamento pode ajudar a definir novos caminhos para o dinheiro, contribuindo para reavaliar prioridades, ampliar as receitas, avaliar tempo mínimo para atingir metas e aumentar patrimônio com investimentos melhores.

Figura 4: Etapas de um planejamento financeiro.



O planejamento financeiro pode começar, por exemplo, com a decisão e a ação de reorganizar as finanças a fim de se atingir um objetivo específico, como poupar dinheiro para realizar um curso, empreender um pequeno negócio, comprar certo bem ou poder viajar e ter novas experiências. Estabelecidos a ação e o objetivo, segue-se um orçamento que mapeia a situação financeira de modo que o planejamento possa ser de fato posto em prática. Uma das formas de montar um planejamento financeiro está representada na [Figura 4](#).

O primeiro ciclo é o diagnóstico, ou seja o orçamento financeiro. Trataremos dele logo adiante. Em seguida vem a análise do orçamento, buscando identificar desperdícios e oportunidades. Por exemplo, a família pode estar desperdiçando água e energia elétrica, pagando sem precisar de tanto. Quitar dívidas, quando possível, ou trocar dívidas mais caras por mais baratas é outra coisa importante. Estabelecer objetivos e metas é um ciclo importante. Isso pode ser, inclusive, a motivação para todo o planejamento. Não precisa ser o terceiro ciclo. Poupar e investir são essenciais para se chegar onde se quer, para a maioria das famílias brasileiras. E quando o dinheiro chega muito rápido, a falta de planejamento financeiro pode gerar perdas enormes, gerando situações de insolvência ou até mesmo de dificuldades financeiras. O ditado “o vem fácil vai fácil” é quase sempre verdade sem planejamento financeiro.

Mas como montar um orçamento financeiro? Por onde começar?

A primeira etapa é o *registro*, onde são coletados os extratos, boletos pagos, cupons fiscais, contracheques, faturas, recibos de aluguel e outros documentos que comprovem o que foi gasto ou recebido naquele mês.

Depois vem a *consolidação*. Classifique os valores em salário, alimentação, lazer, aluguel etc. Organize os dados e faça gráficos de pizza ou de barras para essas áreas do seu orçamento. Com isso você terá mapeado suas despesas e receitas, fechando o diagnóstico.

Agora é preciso pensar nos planos e nas ações. Vamos aos planos!

A *análise* é a fase mais importante, pois é aqui que se descobre onde estão os maiores gastos, a evolução de seus ganhos e despesas etc. É aqui que você decide onde cortar e como ganhar mais.

A última etapa é a *previsão*. Planeje seu futuro financeiro, usando os sonhos que você traçou como guia para estabelecer metas, que devem ser viáveis, factíveis, porém desafiadoras.

O esquema a seguir mostra uma sugestão de etapas para a elaboração de um orçamento financeiro.

Figura 5: Etapas de elaboração de um orçamento.



Adaptado de Zentgraf (2015).

Você entendeu a diferença entre o orçamento e o planejamento? Enquanto o orçamento mostra um retrato (diagnóstico) das entradas e saídas do dinheiro que a família ganha, o planejamento financeiro (plano de ações) é o que a família vai fazer, em termos de ações, atitudes e decisões para atingir seus objetivos.



Atividade 8

Sonhos de uma bolsista

Adrieny tem 15 anos e é aluna da 1ª série do Ensino Médio em uma escola pública no Rio de Janeiro. Ela participa de um programa de iniciação científica nessa escola, e por isso ganha uma bolsa de iniciação científica júnior no valor de R\$ 100,00, durante 8 meses, se cumprir satisfatoriamente todas as tarefas solicitadas, ao longo desse tempo. Considerando que a aluna não paga passagem e nem alimentação no período em que está na escola, responda aos itens abaixo.

- O que você faria no primeiro mês com esses R\$ 100,00 se estivesse no lugar de Júlia? Monte uma tabela com seu orçamento nesse mês
- O que você faria ao longo dos oito meses, com o dinheiro que fosse recebendo?

Atividade 9

O enigma das despesas invisíveis

Douglas é um estudante da 2ª série do Ensino Médio de um Colégio Estadual no Rio de Janeiro.

Ao assistir uma matéria no telejornal sobre a crise financeira no país, decidiu perguntar aos pais quanto gastavam com ele em um mês. Mesmo sem ter um emprego, ele pensou que, de alguma maneira, poderia ajudar os pais com as despesas da casa. Os pais propuseram fazer um orçamento com os valores dos gastos da família, somar tudo e depois dividir por cinco, pois Douglas mora com os pais e dois irmãos menores de idade.

No orçamento eles colocaram os valores de alimentação, telefone, luz, plano de saúde, prestação do carro, cartão de crédito e transporte e verificaram que a despesa total era de R\$ 3.500,00. Ao fazer a divisão desse valor pela quantidade dos membros da família, Douglas levou um susto, pois não fazia ideia de que seus pais gastavam R\$ 700,00 com ele por mês, aproximadamente.

Utilize a tabela abaixo como referência, responda às questões, e descubra quanto você custa por mês.

Tabela 4: Despesas.

Descrição	Valor (R\$)
Alimentação	
Luz	
Água	
Telefone	
Plano de saúde	

Continua na próxima página

Objetivos Específicos

Sonhos de uma bolsista

- Construir orçamento e planejamento financeiros mensais pessoais ou familiares.
- Tomar decisões a partir de orçamentos e planos financeiros.

Solução

Sonhos de uma bolsista

Ambas as respostas são individuais

Nota 7

Objetivos Específicos

O enigma das despesas invisíveis

- Investigar situações financeiras que envolvem orçamento, planejamento e gestão financeira, tanto a pessoal quanto a familiar.
- Resolver problemas relacionados ao orçamento e planejamento financeiro.
- Construir propostas e soluções alternativas como apoio para a tomada de decisão em situações envolvendo orçamentos e planejamentos financeiros, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos.

Sugestões e discussões

O enigma das despesas invisíveis

Nessa atividade convidamos o aluno a pensar no orçamento da própria família e a investigar quanto ele custa por mês. Com isso o estudante é convidado a elaborar um orçamento, a identificar como a família gasta o dinheiro e qual o papel dele nesses gastos. Essas reflexões costumam trazer perplexidade, espanto e curiosidade. Estimule seu aluno a construir novas atitudes, alinhadas a objetivos saudáveis, éticos e sustentáveis, que lhe proporcionem atingir metas que sem tais atitudes não seriam possíveis de serem alcançadas. A atividade também pode ajudar o estudante a entender, na medida em que constrói o orçamento da família, as quatro fases que acabamos de apresentar.



Solução

O enigma das despesas invisíveis

- a) Resposta pessoal.
- b) Resposta pessoal. Veja o comentário sobre a intenção dessa pergunta
- c) Resposta pessoal. Veja a sugestão de variação da atividade proposta.
- d) Resposta pessoal. Observe que essa atividade pode ser perfeitamente usada no Ensino Fundamental, talvez a partir do sétimo ano.

Objetivos Específicos

Bola de neve

- Investigar situações financeiras que envolvem orçamento, planejamento e gestão financeira, tanto a pessoal quanto a familiar.
- Resolver problemas relacionados ao orçamento e planejamento financeiro.
- Construir propostas e soluções alternativas como apoio a tomada de decisão em situações envolvendo orçamentos e planejamentos financeiros, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos.

Sugestões e discussões

Bola de neve

Nessa atividade convidamos o aluno a pensar em uma situação na qual uma jovem busca entender o orçamento da família para tentar construir um plano que vise corrigir alguns desequilíbrios financeiros.

O problema envolve duas partes. Na primeira parte temos uma investigação buscando entender quais são os problemas e onde eles estão. Já na segunda parte há uma questão interessante em que o saldo devedor

Continuação da página anterior

Descrição	Valor (R\$)
Aluguel	
Cartão de crédito	
Lazer	
Educação	
Transporte	
Total	

- a) A partir dos dados que você preencheu, determine o custo mensal que sua família tem com você.
- b) Em sua opinião, esse valor de custo individual é muito, pouco ou razoável? Justifique.
- c) Se você pudesse ajudar a sua família na organização das despesas, o que mudaria?
- d) Quais itens você tiraria ou acrescentaria na tabela a fim de melhorar o controle de gastos em sua família?

Atividade 10

Bola de neve

Mariana é uma adolescente muito estudiosa que mora com seu pai, sua mãe e um irmão mais novo de 10 anos. Essa família tem uma renda mensal fixa de 3.500,00 reais. Para melhorar as finanças da família, eles resolveram elaborar um orçamento doméstico. Para isso, registraram todos os gastos da família nos meses de janeiro, fevereiro e março de 2019. O resultado está apresentado na [Tabela 5](#), com os valores em reais.

Tabela 5: Registro de gastos da família de Mariana.

Descrição	Valor (R\$)		
	Janeiro	Fevereiro	Março
Alimentação	900,00	1000,00	1060,00
Luz	120,00	150,00	170,00
Água	50,00	80,00	90,00
Telefone	150,00	150,00	150,00
Plano de saúde	600,00	600,00	600,00
Aluguel	800,00	800,00	800,00
Cartão de crédito	350,00	120,00	240,00

Continua na próxima página



Continuação da página anterior

Descrição	Valor (R\$)		
	Janeiro	Fevereiro	Março
Lazer	180,00	70,00	50,00
Educação	400,00	400,00	400,00
Transporte	250,00	200,00	200,00
Saldo devedor do mês anterior	0,00	330,00	440,00
Total	3800,00	3900,00	4200,00

Adaptado de Santana (2019).

- Quais os problemas de orçamento que você identifica ao ver os gastos dessa família nesses três meses?
- Qual será o saldo devedor para abril, mantido o padrão observado nos meses anteriores. (Explique que padrão é esse em termos de porcentagem). Por que isso está acontecendo e quais sugestões você daria para essa família?

Atividade 11

Vivendo a vida no Slackline

Adaptado de Santana (2019)

O esquema a seguir representa o registro de uma pessoa, sem filhos, que recebe um salário de 1.502,00 reais por mês.

	Valor (R\$)					
	Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	Maio	Junho
Salário	1.502,00	1.502,00	1.502,00	1.502,00	1.502,00	1.502,00
Comida	-273,00	-252,95	-320,00	-270,00	-298,00	-335,00
Conta de Luz	-350,00	-225,00	-212,00	-210,00	-232,00	-210,00
Conta de Água	-250,00	-125,00	-112,00	-110,00	-132,00	-110,00
Transporte	-416,00	-423,20	-420,00	-416,00	-416,00	-417,20
Lazer/Outros	-875,00	-163,00	-762,00	-10,00	-900,00	0,00
Ganhos Extras	20,00	400,00	21,85	150,00	303,64	0,00
Outros Gastos	0,00	-110,00	0,00	0,00	0,00	-24,00
Dívidas Anteriores	0,00	-706,00	0,00	-332,37	0,00	-189,60
Saldo	-642,00	21,85	-302,15	303,64	-172,36	126,20

sofre um reajuste que não é mencionado no texto. Cabe ao aluno tentar entender que se trata de possíveis juros, descobrir qual é a taxa e investigar o impacto disso na ampliação da dificuldade em resolver o problema com essa “bola de neve”.

Solução

Bola de neve

- Resposta pessoal. O aluno precisará identificar pontos onde ele entende ser possível cortar gastos para equilibrar o orçamento. Ele também pode sugerir que alguma ação para aumentar a renda da família.
- O padrão observado na sequência dos saldos devedores aponta para uma cobrança de juros de 10% ao mês, que pode estar associado ao uso do cheque especial. Considerando esse padrão, o saldo devedor em abril será de 770,00 reais, uma vez que a diferença entre as receitas e as despesas foi de 700,00 reais, que atualizada em 10%, transformar-se-á em 770,00 reais.

Objetivos Específicos

Vivendo a vida no Slackline

- Investigar situações financeiras que envolvem orçamento, planejamento e gestão financeira, tanto a pessoal quanto a familiar.
- Resolver problemas relacionados ao orçamento e planejamento financeiro.
- Construir propostas e soluções alternativas como apoio a tomada de decisão em situações envolvendo orçamentos e planejamentos financeiros, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos.

Sugestões e discussões

Vivendo a vida no Slackline

Nesta atividade convidamos o aluno a pensar sobre a dinâmica da frequência do endividamento que algumas pessoas acabam se acostumando, ou dependendo, diante dos desafios de fechar as contas no final do mês, principalmente aquelas mais simples e com faixa salarial próxima a dois salários mínimos, o que corresponde a aproximadamente 45 milhões de pessoas no Brasil, conforme IBGE (2019b)



A análise de vários meses permite ter uma fotografia sobre hábitos de consumo, o que pode ajudar tanto na qualidade como na precisão na busca de soluções e na tomada de decisões para equilibrar as contas.

Solução

Vivendo a vida no *Slackline*

As respostas são individuais.

Os juros cobrados de janeiro para fevereiro são de $706 - 642 = 64,00$ reais. A taxa de juro cobrada no período é de, aproximadamente, $\frac{64}{642} = 10\%$.

Essa taxa de juro também é observada de mar para abril e de maio para junho.

- Observe o registro dos gastos de uma pessoa durante 6 meses. É possível notar que ela frequentemente obtém dívidas. Você consegue observar algum outro padrão? Se sim, que padrão é esse? Descreva-o.
- Você consegue ver qualquer semelhança entre essa situação e a sua realidade? O que você/a sua família normalmente faria para resolver um problema como o apresentado?
- Preencha o registro a seguir de acordo com o que você acredita que sejam seus gastos.

Tabela 6: Registre seus gastos.

Receitas/Despesas	Valor (R\$)
Salário	
Comida	
Conta de Luz	
Transporte	
Cinema/Festas/Outros	
Material Escolar	
Conta de Internet	
Conta de Celular	
Assinaturas (Netflix, etc)	
Cursos	
Dívidas Anteriores	
Ganhos Extras	
Outros Gastos	
Saldo	



PARA O PROFESSOR: O VALOR DO DINHEIRO NO TEMPO

Objetivo geral

Identificar e compreender alguns fatores que transformam o dinheiro no tempo, tais como inflação, variação cambial e juros.

Conceitos abordados: Valor presente e Valor futuro, Progressões Aritméticas e Geométricas, através das habilidades:

Habilidades da BNCC

EM13MAT101 Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

EM13MAT104 Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.

EM13MAT203 Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

EM13MAT507 Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

EM13MAT508 Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Sugestões e Recomendações

Organização em sala de aula Sugerimos que o professor comece sempre perguntando aos alunos o que podem dizer sobre o valor do dinheiro e sobre o que eles desejam hoje e no futuro. As situações econômicas e financeiras apresentadas logo no início da seção são exemplos que podem ser usados também para motivar a discussão inicial. Convidar os estudantes a pesquisarem informações envolvendo SEF em sites, blogs, jornais, portais, revistas econômicas envolvendo inflação; antes de abordar o tema, pode ampliar o escopo de coisas a partir das quais poderão produzir significados. Convide seus alunos a criar a cultura de investigar os fundamentos e a razoabilidade das informações veiculadas nas mídias sociais de forma fundamentada.

Dificuldades previstas Vamos lidar com exponenciais; progressões geométricas; em algum momento logaritmos; raízes de índices variados. O uso da calculadora é indispensável. Diante de dificuldades nos conceitos, vale a pena parar e explicar, ou fazer algum tipo de revisão antes.

Sugestões gerais Nesta seção, abordamos um dos conceitos mais importantes em finanças, o valor do dinheiro no tempo. Basicamente, estamos interessados em saber o porquê de uma quantia hoje pode valer mais (ter mais poder de compra, por exemplo) ou menos no futuro. Analisamos situações financeiras envolvendo uma das formas de se transformar o dinheiro no tempo: os juros compostos. Lembre-se que vamos considerar os aspectos matemáticos, juntamente com os aspectos não matemáticos, para discutir transformações do dinheiro no tempo, juntamente com possíveis impactos e consequências na vida das pessoas.



Assim, a matemática financeira será uma das ferramentas para se construir educação financeira, e ao mesmo tempo, a investigação de situações financeiras em sala de aula pode gerar boas oportunidades para se aprender matemática, incluindo a matemática financeira.

Enriquecimento da discussão Por que o dinheiro se transforma no tempo? Como o dinheiro se transforma no tempo?

As respostas para essas duas perguntas costumam ser confundidas e reduzidas. Vamos começar esclarecendo a diferença entre as duas.

Na primeira, queremos saber qual a razão do dinheiro se transformar no tempo, ou de uma maneira geral, quais são os fatores que modificam o valor do dinheiro no tempo.

Neste livro abordamos, quatro fatores que influenciam a transformação do dinheiro no tempo: juros; inflação; câmbio e investimento.

Na segunda, queremos saber como o dinheiro se transforma no tempo, ou seja, quais os aspectos matemáticos que modelam, explicam e nos permitem saber o valor de uma quantia no futuro a partir de uma quantia no presente, conhecendo-se o tempo, a taxa e outras eventuais informações adicionais, tais como taxas administrativas, seguros, valor da parcela, início do pagamento das parcelas, número de dias úteis, etc.

Esse é o foco desta seção: discutir como determinar o valor futuro a partir do valor presente.

Em juros, por exemplo, nós temos três tipos de transformação: os juros simples, que são diretamente proporcionais ao tempo à taxa de juros e ao capital inicial aplicado; os juros compostos, em que a taxa incide sobre o valor acumulado, e os juros mistos, uma combinação deles, aplicando-se juros compostos e, em seguida, juros simples.

Perceba que juros são apenas um dos fatores que influenciam na transformação do dinheiro no tempo, e veja que nós não começamos o livro por juros. Apresentamos situações que sequer mencionam os juros.



3 O VALOR DO DINHEIRO NO TEMPO

Quando tomamos decisões financeiras, nos mais variados ciclos da vida – da juventude à velhice, passando pela vida adulta – nos deparamos com escolhas intertemporais, ou seja, escolhas relacionadas ao binômio: *Sacrifícios* × *Benefícios*, que acontecem em momentos diferentes no tempo. Desfrutar o momento hoje, ou cuidar do amanhã? Assim, trocas intertemporais (Eduardo Giannetti, 2005) são situações envolvendo escolhas em que valores ou benefícios usufruídos mais cedo acarretam algum tipo de ônus ou custo a ser pago mais à frente. Vejamos alguns exemplos práticos.

- Contrair ou não um empréstimo para financiar a compra de uma televisão, um carro ou a tão sonhada casa própria?
- Pagar no débito ou no crédito?
- Comprar um celular novo hoje ou usar o dinheiro para fazer um curso de informática nos próximos seis meses?
- Poupar dinheiro no presente para realizar algum sonho ou projeto no futuro (quando isso é possível ou quando o nosso sistema límbico nos permite) ou comprar agora e viver um dia de cada vez sem pensar muito no futuro?
- Comprar a passagem agora ou esperar correndo o risco que o preço aumente?
- Pagar à vista ou pagar parcelado?
- Fazer um PIX de R\$ 380,00 agora, ou comprar no cartão de crédito em 2 de 200, para pagar daqui a 30 e 60 dias?
- Aproveitar a promoção de produtos de primeira necessidade agora, e ter que se apertar um pouco agora, ou comprar mais caro depois, para não se privar do que está acostumado?
- Investir parte da renda para realizar sonhos a médio ou longo prazos ou viver e gastar sem se preocupar com o futuro?
- Investir durante um determinado período da vida para constituir um fundo de reserva para a aposentadoria ou para situações de imprevisto, considerando fatores como aumento da expectativa de vida, a redução da capacidade de trabalho na velhice e os riscos a longo prazo ou ignorar completamente esses aspectos e viver a vida intensamente sem se preocupar com tais questões?

Em cada uma dessas situações temos uma ou mais trocas intertemporais, ou seja, trocas envolvendo sacrifícios e benefícios realizados em diferentes momentos no tempo. Nesta seção, convidamos você a entender algumas formas de transformação do dinheiro no tempo e como isso está relacionado a trocas intertemporais presentes em nosso dia a dia.



Objetivos Específicos

Explorando: O valor do dinheiro no tempo

- Identificar diferentes fatores que influenciam o valor do dinheiro no tempo, tais como juros, inflação, câmbio, investimentos e percepção de utilidade.
- Resolver problemas relacionados a juros simples ou compostos
- Analisar e tomar decisões em situações econômico-financeiras que envolvam o valor do dinheiro no tempo, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos.

Sugestões e discussões

Explorando: O valor do dinheiro no tempo

Aqui apresentamos três atividades que formam um conjunto de situações para iniciarmos a abordagem da noção de valor do dinheiro no tempo e suas formas de transformação. Recomendamos ao professor que leia as orientações no início desta seção para ampliar a visão sobre o valor do dinheiro no tempo, os diferentes fatores que o influenciam, bem como para não se limitar a achar que abordar o valor do dinheiro no tempo significa ensinar juros simples e juros compostos.

Nesse conjunto de três atividades, dispáramos na primeira atividade um convite a pensar sobre juros em um contexto de investimento no mercado financeiro, onde quantias iguais aplicadas representam retornos completamente diferentes, considerando uma mesma taxa e um mesmo prazo final de resgate. Essa atividade só será, de fato, resolvida na página 44. Faremos um percurso, com uma série de problemas mais simples até construirmos as bases para analisá-la de forma completa.

O objetivo dessa primeira atividade é levar o estudante a perceber que o senso comum pode não resolver problemas adequadamente.

Na segunda, temos o contexto de inflação e de variação cambial, modificando o valor do dinheiro no tempo, e consequentemente o poder de compra das pessoas, o que pode afetar a vida de um amplo espectro da população brasileira, pois afeta tanto o preço dos alimentos (com forte impacto na vida da população mais pobre), como o preço de produtos de maior valor agregado, tais como os equipamentos de tecnologia digital.

Explorando

O Valor do Dinheiro no Tempo

Atividade 12

Iguais podem ser diferentes?

Você tem duas possibilidades de fazer uma poupança:

- Investir R\$ 200,00 por mês durante 20 anos
- Investir R\$ 400,00 por mês durante 10 anos, parar de depositar, deixando o acumulado rendendo até completar o prazo de 20 anos.

Considere que o dinheiro renda 1% ao mês, rendendo sempre sobre o saldo acumulado da sua poupança.

- a) Qual a melhor estratégia do seu ponto de vista? Justifique sua resposta.
- b) Qual estratégia que gera o maior valor acumulado ao final de 20 anos?
- c) Considere a seguinte informação:

A Previdência Social é um seguro social adquirido por meio de uma contribuição mensal que garante ao segurado uma renda no momento em que ele não puder trabalhar. Para maiores informações, antes de responder, acesse https://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/previdencia_social.pdf.

O que a situação descrita nesta atividade tem a ver com a Previdência Social no Brasil, em especial com a Reforma da Previdência de 2019?

Resolveremos esta atividade mais à frente.

Atividade 13

Inflação: o que eu tenho a ver com isso?

Leia atentamente as chamadas de algumas matérias veiculadas na internet sobre o impacto da inflação na vida das pessoas?

Panificadores prometem reajustar preço do pão francês

Quem não dispensa um pãozinho francês bem quente todo dia de manhã não vai gostar nada de saber que o preço do produto poderá sofrer reajuste devido à alta do dólar. É que a matéria-prima principal, o trigo, é precificado de acordo com o valor da moeda estrangeira, fazendo com que a saca suba muito. Por isso, a estimativa é de que o pão seja reajustado entre 5 e 10% (Destaque Notícias, 2020).

Como a alta do dólar pode causar uma disparada no preço de eletrônicos no Brasil

Moeda americana segue quebrando recordes e pode começar a ter impacto no preço de produtos como celulares, TVs, tablets, consoles e mais (Renato Santino, 2020).

- a) Você viveu alguma experiência de consumo ou renda, em quem a alta do dólar influenciou na sua vida e da sua família?
- b) A variação cambial pode transformar o dinheiro no tempo? Explique e exemplifique.



Passou do vencimento: e agora?

José tinha uma conta para pagar no valor de R\$ 1.328,78 com vencimento para 15/06/2019. Entretanto, ele só conseguiu pagar a conta no dia 21/06/2019

033-7 03399.19656 71900.000028 76771.001013 6 79210000132878				
Local de pagamento Pagável em qualquer Banco até o vencimento				Vencimento 15/06/2019
Cedente				Ponto Venda / Ident. cedente 0802 196571-9
Data do documento 01/06/2019	Nº documento 7322076634	Espécie doc. N	Aceite N	Data processamento 01/06/2019
Nosso número 000000276771-0				
Carteira COBRANÇA REGISTRADA	Espécie R\$	Quantidade	Valor Documento	(=) Valor documento 1328,78
Instruções (Texto de responsabilidade do cedente) Sr. Caixa não receber valor inferior ao VALOR DO DOCUMENTO. Após vencto cobra multa de 2%, mais juros de 0,033% ao dia.				(-) Desconto / Abatimentos
				(-) Outras deduções
				(+) Mora / Multa
				(+) Outros acréscimos
				(=) Valor cobrado

- O valor da conta muda antes do vencimento? E depois?
- Qual o valor pago por José, considerando as instruções apresentadas no boleto acima?



Você Sabia?

Mas afinal, o que é dinheiro? O dinheiro é um meio de troca, que tem a vantagem de ser melhor que o escambo (troca de mercadorias por outras mercadorias — galinhas por arroz, madeira por espelhos, etc), pois tem equivalência de valor, o que facilita a avaliação e o cálculo. É também um “recipiente de valor”, que permite que as transações econômicas sejam conduzidas durante longos períodos e por longas distâncias geográficas.

Segundo o historiador Niall Ferguson, em seu livro *A Ascensão do Dinheiro*, para desempenhar todas essas funções, o dinheiro tem que estar disponível, ser durável, substituível, portátil e confiável. E ao longo dos séculos, os metais como ouro, prata e bronze foram considerados como a matéria prima monetária ideal. As moedas mais antigas que se conhecem são de aproximadamente 2600 anos atrás (600 AEC^a) e foram encontradas em uma região da Turquia.

Independente da forma como os povos têm utilizado para produzir dinheiro, o que realmente importa é que os interessados concordem com o valor acordado e registrado. Se isso for respeitado, o dinheiro cumpre o seu papel.

Em todo sistema monetário forte, é preciso uma moeda que seja confiável, impressa com padrões de segurança para inibir as falsificações. Para isso, o Brasil dispõe da Casa da Moeda, que em parceria com o Banco Central, tem procurado dotar as cédulas de elementos antifalsificação cada vez mais modernos, contribuindo para a garantia da segurança do dinheiro brasileiro no presente e no futuro.

^aAntes da Era Comum



Figura 6: Niall Ferguson.

Finalmente, na terceira atividade temos uma discussão sobre pagamento de juros no contexto do atraso do pagamento de uma conta. Que tipo de juros são cobrados? Um convite a pensar em um contexto real sobre juros simples, ainda que tais contextos sejam raros, depois de uma discussão sobre juros compostos, iniciada na primeira atividade, mas efetivamente trabalhada ao longo da seção com problemas inicialmente simples, que se transformam aos poucos em problemas mais complexos.

Solução

Explorando: O valor do dinheiro no tempo

As soluções comentadas serão apresentadas no próprio texto, dentro do tópico “Organizando as ideias”

Antes de começarmos a pensar em valor presente e valor futuro, é importante entender o que é juro. O juro é o quanto se paga para usar o dinheiro que não se tem. É uma espécie de aluguel do dinheiro.

Na primeira atividade, qual a estratégia mais viável (possível) financeiramente para você? Será que ela coincide com a estratégia que gera o maior valor acumulado ao final de 20 anos?

Na segunda atividade, podemos dizer que a variação cambial interfere no valor do dinheiro no tempo, e conseqüentemente na vida dos cidadãos, com impactos variados?

Na terceira, os juros e o valor após o vencimento são calculados da mesma forma que seriam calculados os juros da primeira atividade?

Convidamos você a investigar, nas próximas páginas, que é possível determinar a melhor estratégia, do ponto de vista financeiro, usando um conceito muito importante: o valor do dinheiro no tempo. E também como analisar o impacto da inflação e da variação cambial na transformação do dinheiro no tempo.

Na [Atividade 12](#), apesar do total de dinheiro investido ser o mesmo (ou seja, os valores nominais investidos são iguais: $400 \times 120 = 200 \times 240$), eles serão depositados em momentos diferentes. E isso vai gerar valores acumulados no final do período de 20 anos, também diferentes. Depositar quantias maiores antes produz mais dinheiro no futuro do que depositar quantias menores, considerando um mesmo total nominal para prazos finais iguais.

Este resultado significa que contribuições maiores para a previdência social realizadas no presente deveriam gerar maiores retornos no futuro, caso o dinheiro fosse integralmente aplicado.

Visto de outra forma, cobrar mais das pessoas agora deveria gerar montantes maiores no futuro, os quais deveriam permitir aposentadorias melhores e/ou aposentadorias pagas por mais tempo, já que as pessoas estão vivendo mais.

Será que isso vai acontecer, uma vez que após 2019 passaram a cobrar mais das pessoas, todo mês, para a previdência?

Para entendermos por que tudo isso acontece, tanto em seus aspectos matemáticos como em alguns não matemáticos, vamos abordar exemplos mais simples, para que, de forma gradual, cheguemos aos modelos matemáticos que nos permitam analisar melhor a situação apresentada na atividade.

Vamos considerar a seguinte situação financeira. Suponha que Humberto invista R\$ 10.000,00 a uma taxa de 12% ao ano, e deixe o **dinheiro aplicado por cinco anos**. Observe que tempo e taxa estão referidos à mesma unidade de tempo. Ao final desse período, qual será o montante acumulado, considerando que a taxa incida sobre o saldo acumulado a cada ano? (Esse processo, denominado sistema de juros compostos, é o mais usual em aplicações financeiras, e por isso será o primeiro a ser tratado aqui nesse texto).

Aprendemos na seção anterior que, ao aumentarmos uma quantia de uma taxa i , a mesma fica multiplicada por um fator de atualização igual a $(1 + i)$. Em nosso caso, como a cada ano o capital investido aumenta de 12% em relação ao acumulado do ano anterior, temos que a cada ano o acumulado fica multiplicado por $(1 + 12\%) = 1,12$.

Assim, chamando os 10.000,00 reais de valor presente (VP), indicando que ele está associado ao início do investimento, temos que o valor futuro (VF) desta quantia após um ano será 12% maior, ou seja, será de $10.000 \times 1,12 = R\$ 11.200,00$.



Passados mais um ano, aumentará 12% em relação ao acumulado do ano anterior (R\$ 11.200,00) e, portanto, será de $10.000 \times 1,12 \times 1,12 = \text{R\$ } 12.544,00$. Após três anos, repetindo o processo, será de, aproximadamente, $10.000 \times 1,12 \times 1,12 \times 1,12 = \text{R\$ } 14.049,28$.

Como, a cada ano, o valor futuro é 12% maior que o acumulado do ano anterior, e consequentemente multiplicado por 1,12, o Valor Futuro após exatos cinco anos será igual a

$$\begin{aligned} VF &= 10.000,00 \times 1,12 \times 1,12 \times 1,12 \times 1,12 \times 1,12 \\ &= 10.000,00 \times 1,12^5 \\ &= 17.623,00 \text{ reais.} \end{aligned}$$

Os juros nesse caso são ditos juros compostos, uma vez que a taxa incide sobre o acumulado. As representações temporais a seguir mostram a transformação dos dez mil reais inicialmente investidos ao longo dos cinco anos, a uma taxa de 12% ao ano aplicada sempre sobre o acumulado até o ano anterior.

Anos de aplicação	Valor atualizado (R\$)
0	10.000,00
1	$10.000,00 \times 1,12 = 11.200,00$
2	$10.000,00 \times (1,12)^2 = 12.544,00$
3	$10.000,00 \times (1,12)^3 = 14.049,28$
4	$10.000,00 \times (1,12)^4 = 15.735,19$
5	$10.000,00 \times (1,12)^5 = 17.623,42$

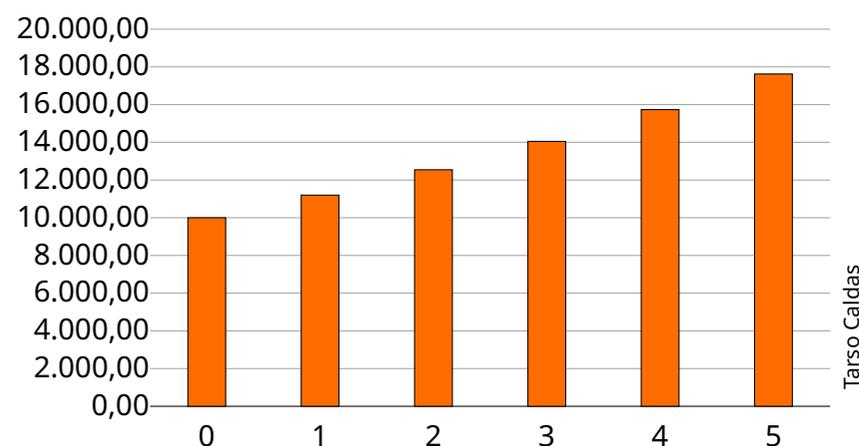


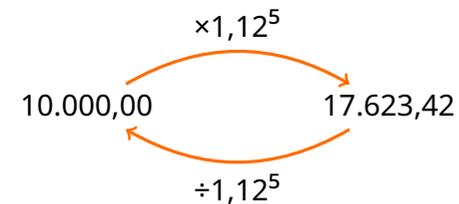
Figura 7: Valor atualizado anual.

Observe que, para cada ano, temos um valor futuro associado aos dez mil reais inicialmente investidos. A cada ano, o valor acumulado é 12% maior que o acumulado do ano anterior, gerando assim uma progressão geométrica (PG) de termo inicial 10.000 e razão igual a 1,12.



Além disso, podemos observar que da mesma forma que obtivemos o valor futuro, a partir do valor presente, poderíamos obter o valor presente, a partir do valor futuro. Nesse caso, o problema seria: quanto preciso investir hoje para ter, daqui a cinco anos, a quantia de R\$ 17.623,42?

Para isso, bastaria realizar a operação inversa, ou seja, fazer: $VP = \frac{17.623,42}{1,12^5} = R\$ 10.000,00$. O esquema a seguir sintetiza essa reversibilidade por meio da operação inversa àquela realizada anteriormente.



Dizemos que R\$ 10.000,00 hoje e R\$ 17.623,42 daqui a cinco anos são capitais equivalentes, a uma taxa de 12% ao ano. Um é equivalente ao outro. E esse é mais um exemplo do dinheiro se transformando no tempo, ou seja, o valor de 10.000,00 reais se modificando devido aos juros acordados entre quem investiu (que abriu mão de usufruir do dinheiro que tinha durante cinco anos) e quem pagou por esses juros (por ter ficado com os 10.000,00 reais durante todo esse tempo).

Um dos pagadores de juros no Brasil é o próprio Estado Brasileiro, que capta dinheiro vendendo títulos públicos.

Ao comprar um título público, você empresta dinheiro para o governo brasileiro em troca do direito de receber no futuro uma remuneração por esse empréstimo, ou seja, você receberá o que emprestou mais os juros sobre esse empréstimo. Dessa maneira, com o Tesouro Direto, você não somente se beneficia de uma alternativa de aplicação financeira segura e rentável, como também ajuda o país a promover seus investimentos em saúde, educação, infraestrutura, entre outros, indispensáveis ao desenvolvimento do Brasil.

(Fonte: Portal do Tesouro Direto)



Mas podemos ver o dinheiro se transformando no tempo, não apenas investindo dinheiro para poupança, a fim de atingir objetivos de médio e longo prazos que traçamos para nossas vidas. Precisamos tomar muito cuidado com a forma como usamos o crédito para consumo de curto de prazo, em especial, com o cartão de crédito quando usado de maneira não planejada.

Observação

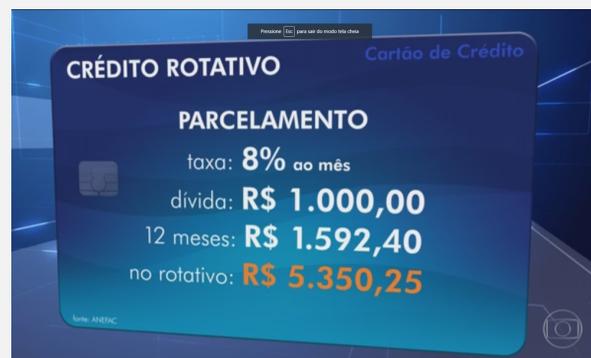
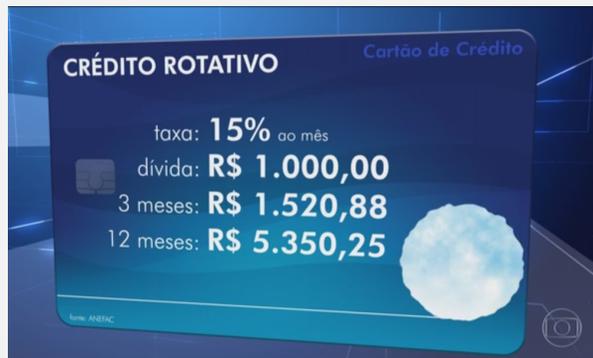
As taxas que nos cobram geralmente são bem maiores que as taxas que nos pagam.





Para refletir

Assista a este [vídeo na matéria do portal G1^a](#) para ver como essa dinâmica de crescimento afeta a vida financeira das pessoas e suas relações de consumo.



Por que as pessoas usam o cartão de crédito para tomar dinheiro emprestado?

^a<http://g1.globo.com/economia/seu-dinheiro/noticia/divida-do-cartao-de-credito-sera-parcelada.ghtml>

Generalizando, uma quantia VP , aplicada a uma taxa i por período, transforma-se após n períodos, em um valor futuro VF igual a:

$$VF = VP \cdot (1 + i)^n$$

Isso acontece pois se a cada período, o valor futuro do período anterior é multiplicado por $(1 + i)$, então após n períodos, teremos que o VP ficará multiplicado n vezes pelo fator $(1 + i)$, gerando $VF = VP (1 + i)^n$.

Vimos aqui mais uma causa da transformação do dinheiro no tempo: os juros, que são uma forma de aluguel do dinheiro. **Quem paga juros, opta por uma troca intertemporal: usufruir do dinheiro de terceiros hoje, ou por um período, e pagar ao longo do tempo o que pegou acrescido de uma quantia adicional, chamada juro.**

A situação referente ao investimento de Humberto é uma troca intertemporal, pois ele optou em abrir mão de um dinheiro hoje (fazer um sacrifício hoje, ao investir) para obter um benefício no futuro – um valor acrescido de juros, para atingir algum objetivo específico, por exemplo proteção do dinheiro, poupança, férias, viagem, doação, criar um projeto social, trocar de carro, dentre muitos outros. Voltaremos à [Atividade 12](#) no Organizando: *Séries Uniformes*.

Na [Atividade 13](#) temos duas situações envolvendo o aumento de preços produzido pela alta do dólar. Uma foi no preço do pão; a outra no preço de produtos eletrônicos. Mas por que isso acontece?

Isso acontece porque vários produtos, dentre eles a farinha de trigo para a produção do pão, e dos componentes eletrônicos no caso de produtos eletroeletrônicos (celulares, smartphones, televisores, caixas de som, geladeiras, computadores, tablets, fones, dentre outros) têm seus preços atrelados ao dólar. As empresas nos vendem os produtos em reais, mas compram trigo e eletrônicos dos fornecedores pagando em dólares. E a quantidade de reais necessários para comprar um dólar pode variar no tempo. Eis o dinheiro se transformando no tempo, e isso não tem nada a ver com juros.

Por exemplo, se 1,00 dólar custava 4,00 reais em janeiro e 5,00 reais em maio, isso significa que os preços em reais provavelmente vão mudar. Para comprar um produto que cus-



tava 1.000,00 dólares no primeiro semestre de 2020, a empresa compradora precisará de 4.000,00 reais em janeiro e de 5.000,00 reais em maio. Observe que o preço de 1.000,00 dólares não mudou, mas em reais o preço aumentou.

Olhando para a variação de reais gastos, de 4.000,00 reais para 5.000,00 reais, os preços em reais aumentaram:

$$\frac{(5.000 - 4.000)}{4.000} = 25\%$$

Por outro lado, o valor do real diminuiu em 20 %, pois um real valia $\frac{1}{4} = 0,25$ dólares, e passou a valer $\frac{1}{5} = 0,20$ dólares, logo o valor do real variou de

$$\frac{(0,20 - 0,25)}{0,25} = -20\%$$

Nesse caso, os preços em reais aumentaram em 25 %, e o real se desvalorizou em 20 %, por isso a taxa é negativa.

Ou seja, a variação cambial produziu uma transformação no valor do dinheiro no tempo. Isso aconteceu, por exemplo, no primeiro semestre de 2020 no Brasil, onde vivenciamos uma forte alta do dólar com a pandemia do novo coronavírus, que influenciou o aumento de preço em vários produtos, dentre eles os eletrônicos.



Para refletir

Você tem percebido o impacto da variação cambial na sua vida e de sua família?

Na [Atividade 14](#) temos um exemplo de uma transformação do dinheiro no tempo diferente das duas apresentadas anteriormente.

O valor da conta não muda até a data do vencimento, nesse caso, pois não há informações sobre algum tipo de desconto para quem pagar antes do vencimento.

Entretanto, depois do vencimento, o valor da conta muda com o tempo. Mas a forma de cálculo é diferente das duas situações anteriores. Veja a imagem do boleto.

033-7 03399.19656 71900.000028 76771.001013 6 79210000132878						
Local de pagamento					Vencimento	
Pagável em qualquer Banco até o vencimento					15/06/2019	
Cedente					Ponto Venda / Ident. cedente	
					0802 196571-9	
Data do documento	Nº documento	Espécie doc.	Aceite	Data processamento	Nosso número	
01/06/2019	7322076634		N	01/06/2019	000000276771-0	
Carteira	Espécie	Quantidade	Valor Documento		(=) Valor documento	
COBRANÇA REGISTRADA	R\$				1328,78	
Instruções (Texto de responsabilidade do cedente)					(-) Desconto / Abatimentos	
Sr. Caixa não receber valor inferior ao VALOR DO DOCUMENTO. Após vencido cobra multa de 2%, mais juros de 0,033% ao dia.					(-) Outras deduções	
					(+) Mora / Multa	
					(+) Outros acréscimos	
					(=) Valor cobrado	

Há cobrança de uma multa de 2 %, aplicada sobre o valor da conta até o vencimento, e mais juros de 0,033 % ao dia. Esses juros são chamados de juros simples, pois a taxa incide sobre o valor inicial, e não sobre o valor acumulado da dívida. Os juros simples são diretamente proporcionais ao tempo e à taxa, referidos a uma mesma unidade.



Assim, como José pagou a conta com 6 dias de atraso, pois o vencimento era 15/06/2019 e ele pagou no dia 21/06/2019, ele pagará juros de 0,033 % sobre o valor da conta, por cada dia de atraso. Assim, ele vai pagar $6\% \times 0,033\%$ sobre o valor da conta, gerando juros de R\$ 2,36.

Podemos calcular assim:

$$\begin{aligned} J &= \text{R\$ } 1.328,78 \times 0,033\%/\text{dia} \times 6 \text{ dias} \\ &= \text{R\$ } 2,36. \end{aligned}$$

Além disso, há uma multa de 2 % sobre o valor da conta.

$$\begin{aligned} \text{Multa} &= \text{R\$ } 1.328,78 \times 2\% \\ &= \text{R\$ } 26,58. \end{aligned}$$

De uma maneira geral, no sistema de juros simples, com taxa i ao período, os juros são diretamente proporcionais ao tempo e à taxa, e variam, período a período, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Após 1 período, temos } J &= i \cdot VP, \\ \text{após 2 períodos, temos } J &= 2i \cdot VP, \\ \text{após 3 períodos, temos } J &= 3i \cdot VP. \end{aligned}$$

Mantendo o padrão, após n períodos, temos:

$$J = ni \cdot VP.$$

Observe que os Juros devidos, nesse caso, são diretamente proporcionais ao tempo (prazo da operação) e à taxa.

Assim, a sequência formada pelo total de juros devidos, a cada período, é uma progressão aritmética.

Assim, após n períodos aumentando de uma taxa i a cada período, o valor presente, nesse sistema de juros simples, transformar-se-á em $VP + ni \cdot VP$ e, portanto, o valor futuro será igual a:

$$VF = VP \times (1 + ni).$$

Ou seja, o VF , no regime de juros simples, cresce segundo uma progressão aritmética de termo inicial VP e razão igual a $VP \cdot i$ (juros de cada período unitário)

Vimos assim alguns fatores que influenciam o valor do dinheiro no tempo. Para sabermos a forma de transformação do dinheiro no tempo, e os cálculos que vamos utilizar, precisamos saber qual é a regra que está sendo usada. Vimos que juros compostos funcionam de uma maneira, juros simples de outra e a variação cambial de outra. A regra de ouro da Matemática Financeira é: quem tem o ouro faz a regra.

Observe que, em cada situação analisada, tínhamos apenas a transformação de uma quantia ao longo do tempo. Veremos na próxima seção que podemos ter um ou mais capitais se transformando em um ou mais capitais ao longo do tempo.



Você Sabia?

As pessoas atribuem valor às coisas tendo ou não consciência disso. E esse valor influencia profundamente as decisões humanas, impactando fortemente o curso da história. Talvez por



isso a tomada de decisão humana vem sendo estudada por diferentes áreas, tais como a sociologia, a antropologia, a psicologia, a economia, o marketing, dentre outras.

Quando falamos de valor do dinheiro no tempo, estamos discutindo apenas uma visão, dentre muitas, sobre qual é o valor que o dinheiro realmente possui. E mesmo assim, muitas interpretações podem surgir.

Por exemplo, qual o valor de uma cesta básica de 150,00 reais para uma família carente? E para uma família abastada? Mil reais para um jovem da periferia no início de carreira tem o mesmo valor que 1.000,00 reais para um jovem rico? O que tem mais valor: possuir uma casa própria e ficar pagando 30 anos, ou morar de aluguel e usar o dinheiro dos juros para pagar o aluguel e com a sobra viajar e conhecer diversos lugares no mundo?



Figura 8: Haj patel.

O que pode ter muito valor para você, pode não ter para o seu irmão ou amigo. O que pode ter muito valor para você hoje, pode não valer muito para você daqui a 15 anos. O que pode ter pouco valor para a sociedade hoje, pode ter muito valor em alguns meses no futuro. Por exemplo, qual o valor que a sociedade brasileira dava ao álcool em gel em janeiro de 2020? E em abril de 2020? Haj Patel, economista e professor da universidade de Berkeley, nos diz que vivemos uma era em que é muito comum associar a ideia de “valor das coisas” ao preço que elas custam. Para ele, um dos problemas dessa associação entre valor e preço é o fato de que o preço pode ser distorcido e o valor também. O valor da etiqueta não se resume ao custo de produção somado à margem de lucro. Custos ambientais (emissão de CO₂, poluição de rios, degradação da terra na extração

de minerais), de saúde (alimentos associados a cardiopatias e obesidade), e sociais (trabalho escravo, subempregos, geração de conflitos locais) estão embutidos no preço dos produtos.

Além disso, frases como: se é caro deve ser bom, ou ainda, tem que custar caro porque é muito bom, fazem parte da opinião de muita gente que conhecemos, e são bem frequentes na sociedade predominantemente capitalista que experimentamos. Como Oscar Wilde escreveu a mais de um século: “hoje em dia, as pessoas sabem o preço de tudo e o valor de nada”.

De uma maneira geral, podemos tentar entender o valor como um parâmetro que usamos para avaliar a capacidade de algo satisfazer nossas necessidades e do grupo social em que vivemos. Refletir sobre qual valor atribuímos a bens, serviços, atitudes, comportamentos, ideias é muito importante, pois as consequências das nossas escolhas baseadas no valor que damos às coisas podem ser geradoras de vida e paz ou produtoras de morte e guerra.



Atividade 15

O rapaz que editava vídeos

Fábio é um rapaz apaixonado por futebol, e tem se aperfeiçoado em editar vídeos. Mesmo tendo apenas 16 anos, ele ajuda seu pai e sua mãe na venda de bolos e doces pela internet. Para conciliar essas duas atividades com suas aulas na escola pela manhã, com curso de inglês à tarde e com o futebol dos amigos nos finais de semana, ele precisa de planejamento e disciplina. Um dos frutos de tudo isso é que ao longo desse ano ele conseguiu juntar uma quantia de R\$ 2.000,00. Ele decidiu gastar R\$ 1.000,00 com ele próprio, parte pagando um novo curso de edição digital de imagens e parte comprando roupas, e guardar os outros R\$ 1.000,00. Mas onde vai guardar esse dinheiro? Ele considera três opções:

- deixar o dinheiro com os pais dele, e pegar quando precisar;
- aplicar o dinheiro na poupança;
- aplicar o dinheiro no tesouro direto, usando a conta da mãe.

Considere que, durante os 12 meses seguintes, a aplicação de Fábio na poupança remunere a uma taxa de 4% ao ano, sem cobrança de impostos, e o tesouro direto a 6% ao ano, com a cobrança de 20% de IR (imposto de renda) sobre os juros pagos.

- a) Qual das três opções você escolheria?
- b) Qual o valor futuro líquido (retirados os impostos) de cada uma das aplicações?
- c) Qual das três opções produz o maior ganho financeiro?

Atividade 16

O valor do amanhã

Pensando no longo prazo, Fábio fez uma simulação em outro título, investindo os R\$ 1.000,00 em 01/08/2020, e retirando o acumulado na data do vencimento em 01/01/2026. O resultado da simulação está apresentado a seguir, onde os investimentos simulados no primeiro quadro estão representados nas [Tabela 7](#) e [Figura 9](#).

Olhando para as simulações, responda:

- a) Em qual das cinco opções você investiria o dinheiro? Justifique sua resposta usando tanto a tabela quanto o gráfico.
- b) Quais são as vantagens e desvantagens da poupança em relação ao título do tesouro direto apresentado na simulação?

Objetivos Específicos

O rapaz que editava vídeos

- Identificar diferentes fatores que influenciam o valor do dinheiro no tempo, tais como juros, inflação, câmbio, investimentos e percepção de utilidade
- Resolver problemas relacionados a Valor Presente e Valor Futuro no regime de juros simples ou compostos.
- Analisar e tomar decisões em situações econômico-financeiras que envolvam o valor do dinheiro no tempo, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos.

Solução

O rapaz que editava vídeos

- a) Resposta pessoal
- b) O valor futuro líquido da poupança seria R\$ 1.040,00 e da aplicação do tesouro direto seria de R\$ 1.048,00.
- c) Veja que a primeira opção, se Fábio deixar o valor de R\$ 1.000,00 com os pais dele, este dinheiro não lhe renderá juros. Na segunda opção, se Fábio aplicar o seu dinheiro na poupança durante 12 meses (1 ano) a uma taxa de 4%, ao final de um ano, Fábio terá o montante de R\$ 1.040,00. Na terceira opção, se Fábio aplicar o dinheiro no tesouro direto, ao final de um ano, ele terá a quantia de R\$ 1.060,00 - 12,00 (20% de R\$ 60,00) = R\$ 1.048,00. Logo, a melhor opção seria ele aplicar R\$ 1.000,00 no tesouro direto, pois é a aplicação com maior rentabilidade.

Nota 8

Objetivos Específicos

O valor do amanhã

- Identificar diferentes fatores que influenciam o valor do dinheiro no tempo, tais como juros e investimentos.
- Resolver problemas relacionados a Valor Presente e Valor Futuro no regime de juros simples ou compostos.
- Analisar e tomar decisões em situações econômico-financeiras que envolvam o valor do dinheiro no tempo, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos.



Solução

O valor do amanhã

a) O Tesouro é a aplicação que apresenta maior valor líquido de resgate e a maior rentabilidade líquida, portanto, seria a melhor opção para investir.

b) A vantagem da Poupança em relação ao Tesouro é que a Poupança tem custo e valor de imposto de renda zero. A desvantagem é que a Poupança rende menos que o Tesouro.

No tesouro, é importante levar o investimento até a data do vencimento. Apesar do investidor poder resgatar a qualquer momento, variações no preço dos títulos decorrentes de fatores econômicos variados, podem reduzir o retorno prometido, incluindo até mesmo trazer prejuízo a quem resgata antes, como também pode ampliar o retorno prometido em alguns casos, como por exemplo, em contexto de redução de taxa Selic.

Nota 9

Objetivos Específicos

Tomando decisões diante das emergências

- Identificar diferentes fatores que influenciam o valor do dinheiro no tempo, tais como juros e investimentos.
- Resolver problemas relacionados a Valor Presente e Valor Futuro no regime de juros simples ou compostos.
- Analisar e tomar decisões em situações econômico-financeiras que envolvam o valor do dinheiro no tempo, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos.

Solução

Tomando decisões diante das emergências

- a) A estratégia menos custosa para Vanessa seria utilizar o dinheiro da poupança, pois ela não teria que pagar os juros de empréstimo para nenhum banco.
- b) Durante três meses, Vanessa
- teria um valor, a uma taxa mensal de 0,5% na poupança, de $10.000 \times (1 + 0,005)^3 = R\$ 10.150,75$, ou seja, deixaria de ganhar 150,75 reais;

Tabela 7: Simulação do tesouro prefixado 2026.

	Data de resgate	Valor inicial investido	Aportes mensais	Soma dos valores investidos (nominal)		
	01/01/2026	R\$ 1.000,00	R\$ 0,00	R\$ 1.000,00		
Investimento	Valor bruto de resgate (R\$)	Rentabilidade bruta (% a.a.)	Custos (R\$)	Valor do imposto de renda	Valor líquido de resgate (R\$)	Rentabilidade líquida (% a.a.)
Tesouro	1.371,49	6,00	15,78	55,72	1.297,62	4,93
Poupança	1.213,42	3,64	0,00	0,00	1.213,42	3,64
CDB ¹	1.232,68	3,93	0,00	34,90	1.197,78	3,38
LCI ² /LCA ³	1.208,18	3,55	0,00	0,00	1.208,18	3,55
Fundo DI ⁴	1.239,03	4,03	0,00	35,27	1.200,23	3,42

¹ Certificados de Depósito Bancário

² Letra de Crédito Imobiliário

³ Letra de Crédito do Agronegócio

⁴ Fundo de Renda Fixa Referenciado a Depósito Interbancário



Figura 9: Simulação feita por Fabio no site do Tesouro.

Tomando decisões diante das emergências

Atividade 17

Vanessa teve uma emergência e precisa de R\$ 10.000,00 para daqui a dois dias. Ela pode usar o cheque especial para fazer um empréstimo pelo bankline, ou buscar uma alternativa mais barata. Pensando um pouco, ela lembra que tem R\$ 10.000,00 na poupança, guardados por ela mesma para alguma emergência. Considere que esse dinheiro na poupança renda 0,5% ao mês para Vanessa, enquanto que as taxas do cheque especial cobradas pelos principais bancos brasileiros estão apresentadas na Tabela 8. Ela precisa decidir se tira o dinheiro da poupança ou se pega dinheiro com o banco usando o cheque especial.



Tabela 8: Taxas de juros praticadas por bancos no Brasil.

Banco	Taxa Mensal (%)	Taxa Anual (%)
Banco BMG S.A.	3,00	42,58
Banco Modal	3,68	54,31
Banco Fator	4,00	60,10
Banco do Nordeste do Brasil	4,71	73,66
Caixa Economica Federal	5,20	83,70
Banco do Brasil S.A.	7,57	140,02
Banco Bradesco S.A.	7,63	141,68
Itaú Unibanco S.A.	7,70	143,57
Banco Original	7,80	146,20
Banco Safra S.A.	7,84	147,32
Banco Santander (Brasil) S.A.	7,95	150,36

Dados do Banco Central. Período de julho de 2020.

- a) Qual a estratégia menos custosa para Vanessa, dentre as duas apresentadas, do ponto de vista exclusivamente financeiro, independente de qual Banco ela seja cliente? Justifique sua resposta.
- b) Quantos reais ela economizaria em juros, considerando as duas opções, ou seja, comparando o que ela vai pagar de juros no cheque especial com o que ela vai deixar de ganhar na poupança, para um empréstimo de R\$ 10.000,00 durante 3 meses? Considere aqui os dois maiores bancos públicos e os dois maiores privados do Brasil.

- pagaria na Caixa Econômica Federal, a uma taxa mensal de 5,20 %, o valor de $10.000 \times (1 + 0,052)^3 = \text{R\$ } 11.642,53$;
- pagaria no Banco do Brasil S.A., a uma taxa de mensal de 7,57 %, o valor total de $10.000 \times (1 + 0,0757)^3 = 12.447,25$ reais;
- pagaria no banco Itaú, a uma taxa de 7,70 % ao mês, $10.000 \times (1 + 0,077)^3 = \text{R\$ } 12.492,43$;
- pagaria banco Bradesco S.A., a uma taxa mensal de 7,63 %, o valor total de $10.000 \times (1 + 0,0763)^3 = \text{R\$ } 12.468,09$.

Nota 10



PARA O PROFESSOR: O VALOR DO DINHEIRO NO TEMPO — CAPITAIS EQUIVALENTES

Objetivos gerais

- Investigar situações financeiras que envolvem o valor do dinheiro no tempo, considerando o conceito de capitais equivalentes.
- Resolver problemas relacionados capitais equivalentes.
- Analisar e tomar decisões em situações econômico-financeiras que envolvam o conceito de capitais equivalentes, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos.

Conceitos abordados: taxas, fatores e capitais equivalentes.

Investigar situações financeiras que envolvem o valor do dinheiro no tempo, considerando o conceito de capitais equivalentes, através das habilidades:

Habilidades da BNCC

EM13MAT101 Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

EM13MAT203 Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

EM13MAT507 Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

EM13MAT508 Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Recomendações para o professor

Organização em sala de aula Esta seção pode ser vista como uma extensão da anterior. Vamos investigar situações financeiras em que podemos ter um ou mais capitais se transformando em um ou mais capitais ao longo do tempo. A primeira atividade aponta para isso, e pode ser realizada em grupos de quatro alunos, gerando interação entre os estudantes e identificação com os personagens da atividade. Convide seus alunos a criar a cultura de investigar os fundamentos e a razoabilidade das informações veiculadas nas mídias sociais de forma fundamentada.

Dificuldades previstas Os cálculos agora são um pouco mais complexos, e podem demandar maior manipulação algébrica envolvendo equações fracionárias. Começar de exemplos com poucos valores, e estruturar o problema usando a representação temporal que privilegia o presente para o futuro pode ajudar na abordagem do tema.

Sugestões gerais Falar sobre capitais equivalentes é falar sobre trocas intertemporais, tendo ou não consciência disso. Reforçamos que nesta seção vamos investigar situações em que podemos ter um ou mais capitais se transformando em um ou mais capitais ao longo do tempo.

Primeira sugestão: Ir do presente para o futuro é mais intuitivo e costuma ser melhor recebido pelos alunos segundo algumas pesquisas, tais como André Bernardo Campos (2013), Muniz Jr. e



Jurkiewicz (2016b), Santana (2019). Então sugerimos fortemente iniciar com abordagens em que o dinheiro se transforme do presente para o futuro. As seções organizando mostra um exemplo disso. Comparar os valores em cada data, ainda que se repita o trabalho, costuma ser melhor, segundo os estudos de Muniz Jr. e Jurkiewicz, do que simplesmente trazer todos os valores do futuro para o presente. Cabe observar que bem, ainda que a equivalência de capitais nos forneça que não importa a data de comparação de capitais, o que importa é que seja a mesma. Trabalhar representações do presente para o futuro se alinha com a nossa percepção de tempo, e isso costuma ser muito bem recebido e utilizado pelos alunos.

Enriquecimento da discussão Para abordar capitais equivalentes, sugerimos fortemente a leitura completa de dois artigos, sendo o primeiro sobre a noção de trocas temporais e o segundo sobre o conceito de representações temporais. Repare que são conceitos diferentes, ainda que o conceito de representação temporal tenha sido criado pelo autor, em sua tese de doutorado, para a descrição e abordagem didática de situações financeiras envolvendo trocas intertemporais.

- a) Tomada de decisão e trocas intertemporais: uma contribuição para a construção de ambientes de educação financeira escolar nas aulas de matemática (Muniz Jr., 2016b)
- b) Representações temporais e o valor do dinheiro no tempo: conexões entre Educação financeira e o ensino de Matemática (Muniz Jr. & Jurkiewicz, 2016b).

Do primeiro artigo, destacamos os sete papéis das trocas intertemporais. Diante desses exemplos, e de tantos outros que poderíamos apresentar, os papéis das trocas intertemporais podem ser sintetizados em sete pontos nodais:

- a) permitem discutir a transformação/valor do dinheiro no tempo, uma questão central em nossa concepção de EFE;
- b) contribuem para a reflexão sobre os fatores que geram a mudança do valor do dinheiro no tempo, tais como juros, inflação, desvalorização cambial, oportunidades de investimento, renda e emprego.
- c) caracterizam um incontável número de situações econômico-financeiras, que envolvem sacrifícios e benefícios que acontecem em diferentes momentos do tempo;
- d) permitem tratar de questões sociais, éticas e ambientais, dentro da perspectiva das trocas que as pessoas fazem ao longo de suas vidas e as possíveis consequências;
- e) convida para a reflexão sobre os efeitos do planejamento de curto, médio e longo prazo na realização de sonhos e na proteção contra injustiças, desigualdades e armadilhas;
- f) estimula a discussão sobre questões comportamentais, tais como impaciência, cultura do consumo, viver o agora antes que acabe, mudança de perfil de consumo, dentre outras;
- g) contribui para a discussão sobre aspectos macroeconômicos, como inflação, política de câmbio e geração de renda, relacionados às possibilidades e limitações nas e das tomadas decisões individuais, familiares e de uma sociedade.

Do nosso segundo artigo, convidamos o professor a ampliar a visão sobre as representações temporais, isto é, representações de situações financeiras envolvendo a transformação do dinheiro no tempo. Os esquemas com eixos de setas, seta para cima, seta para baixo, são apenas algumas das formas de se representar trocas intertemporais e os valores em suas respectivas datas.

Para esse convite, destacamos o seguinte trecho do artigo de Muniz Jr. (2016b, p. 125).



Chamamos de *representações temporais* as representações pictóricas (gráficas, tabulares ou esquemáticas) que permitem:

- a) associar as quantias às suas respectivas datas;
- b) reforçar o dinamismo do valor do dinheiro no tempo;
- c) auxiliar na análise da evolução de dívidas e/ou saldos acumulados;
- d) auxiliar na determinação do tempo de transformação de uma quantia ou de uma série de quantias;
- e) contribuir para explorar a equivalência de capitais, a partir das taxas de desconto ou de retorno fornecidas ou procuradas.

Tais representações têm se mostrado importantes para os alunos na análise de variadas situações, como apontam nossos resultados iniciais, principalmente quando voltamos nosso foco para questões relativas ao ensino e investigação, pois contribuem, além do que já expomos, para ampliar ainda mais as possibilidades de se mostrar que o valor do dinheiro, dada uma taxa, muda com o tempo, e os impactos disso na vida das pessoas.

No Livro Aberto de Educação Financeira, utilizamos representações temporais variadas, e não apenas o eixo das setas apresentado no excelente livro *Progressões e Matemática Financeira* do amigo e eterno professor Morgado.



4 CAPITAIS EQUIVALENTES

Nas situações anteriores, tínhamos uma quantia se transformando em outra ao longo do tempo, ou seja, um valor presente se transformando em um valor futuro. Convidamos você a investigar e a refletir sobre situações em que podemos ter um ou mais capitais se transformando em um ou mais capitais ao longo do tempo.

Explorando

Capitais Equivalentes

Atividade 18

E o tempo levou!

Considere que quatro estudantes da última série do Ensino Médio combinaram poupar trezentos reais cada um para comprarem um presente de formatura no final do ano, em dezembro. As estratégias de poupança usadas por eles foram todas diferentes entre si, conforme mostra a tabela a seguir.

	Valor aplicado (R\$)		
	Julho	Agosto	Setembro
Giovana	100,00	100,00	100,00
Polyana	300,00	—	—
Juliana	150,00	150,00	—
Luiz Felipe	—	—	300,00

- Qual dessas quatro estratégias você usaria para poupar o dinheiro?
- Sem fazer as contas, qual estratégia lhe parece gerar o maior valor acumulado ao final?
- Considerando que todos eles consigam fazer o dinheiro render a uma taxa de 1% ao mês, quem vai obter o maior valor acumulado em dezembro? Justifique apresentando as contas.
- Compare a sua resposta no item *b* com a do item *c*. Caso tenham sido diferentes, por que você acha que isso aconteceu?

Objetivos Específicos

E o tempo levou!

- Investigar situações financeiras que envolvem o valor do dinheiro no tempo, considerando o conceito de capitais equivalentes
- Resolver problemas relacionados aos capitais equivalentes.
- Analisar e tomar decisões em situações econômico-financeiras que envolvam o conceito de capitais equivalentes, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos.

Sugestões e discussões

E o tempo levou!

Nessa atividade disparadora da seção sobre equivalência de capitais convidamos o estudante a analisar uma SEF envolvendo quatro jovens que aplicaram uma mesma quantia (R\$ 300,00), a uma mesma taxa, só que distribuídos de diferentes formas ao longo do tempo, como estratégias de poupança para a festa de formatura no final do ano.

Queremos convidar o estudante a perceber como prazo de aplicação, o valor aplicado, e o momento da aplicação influenciam no valor futuro, bem como ensinar com a matemática ajuda a modelar a situação. Os quatro investiram o mesmo valor (nominal), mas não terão o mesmo valor ao final da operação. Reforçamos que dois ou mais capitais são equivalentes, a uma mesma taxa, quando têm o mesmo valor em uma mesma data. Assim, não importa a data, o que importa é que seja a mesma! Se o dinheiro na poupança rende 6% ao ano, então R\$ 100,00 hoje e R\$ 106,00 daqui a 1 ano são equivalentes, a esta taxa. É esse o conceito que vamos explorar nessa seção.

Solução

E o tempo levou!

A atividade será detalhadamente investigada no próximo organizando as ideias.



Vamos analisar a transformação do dinheiro no tempo para cada um dos quatro estudantes.

Primeiro, vamos investigar como os valores aplicados pelos quatro estudantes se transformam ao longo do tempo. Começemos pela estratégia de Giovana.

Tabela 9: Estratégia de aplicação de Giovana.

Valores investidos (R\$)					
Julho	Agosto	Setembro	Outubro	Novembro	Dezembro
100,00					
	100,00				
		100,00			

Tabela 10: Montante atualizado da estratégia de Giovana.

Valores atualizados (R\$)					
Julho	Agosto	Setembro	Outubro	Novembro	Dezembro
100,00	101,00	102,01	103,03	104,06	105,10
—	100,00	101,00	102,01	103,03	104,06
—	—	100,00	101,00	102,01	103,03
Total					312,19

Na *representação temporal* (Muniz Jr. & Jurkiewicz, 2016a) acima, observe que os R\$ 100,00 aplicados em julho transformam-se em R\$ 101,00 em agosto, depois em R\$ 102,01 em setembro, em seguida em R\$ 103,03 em outubro, em R\$ 104,06 em novembro e finalmente em R\$ 105,10 em dezembro. Essa sequência de valores representa a transformação dos R\$ 100,00 aplicados em julho ao longo desse período. Fazendo isso para os R\$ 100,00 aplicados em agosto e setembro, Giovana terá em dezembro um total igual a

$$VF_{\text{Giovana}} = 105,10 + 104,06 + 103,03 = \text{R\$ } 312,19$$

Também poderíamos obter o VF total a partir da soma dos valores futuros de cada uma das aplicações mensais, sem precisar calcular o valor atualizado mês a mês. De fato,

$$VF_{\text{Giovana}} = 100 \cdot 1,01^5 + 100 \cdot 1,01^4 + 100 \cdot 1,01^3 = \text{R\$ } 312,19$$

Outra forma de se obter o VF de Giovana, em dezembro é calcular o acumulado mês a mês, conforme se pode ver na representação temporal a seguir.



Tabela 11: Valor acumulado mês a mês da estratégia de Giovana.

Mês	Valor acumulado (R\$)					
	Julho	Agosto	Setembro	Outubro	Novembro	Dezembro
Saldo inicial	0,00	101,00	203,01	306,04	309,10	312,19
Depósito	100,00	100,00	100,00	—	—	—
Saldo final	100,00	201,00	303,01	306,04	309,10	312,19

Nesse caso, o modelo matemático que fornece o VF das aplicações de Giovana é dado por:

$$VF_{Giovana} = [(100 \cdot 1,01 + 100) \cdot 1,01 + 100] \cdot 1,01^3$$

$$VF_{Giovana} = (100 \cdot 1,01^2 + 100 \cdot 1,01 + 100) \cdot 1,01^3$$

$$VF_{Giovana} = 100 \cdot 1,01^5 + 100 \cdot 1,01^4 + 100 \cdot 1,01^3 = \text{R\$ } 312,19$$

Veja que esse modelo, apesar de apresentar uma outra lógica na forma de operar as quantias, é equivalente ao anterior.

No caso de Polyana, temos apenas uma única aplicação de R\$ 300,00, em julho, conforme apresentado a seguir. Assim, o VF em dezembro será igual a:

$$VF_{Polyana} = 300 \cdot 1,01^5 = \text{R\$ } 315,30$$

No caso de Juliana, temos dois valores a serem transformados no tempo, de modo que o VF total para ela será igual a

$$VF_{Juliana} = 150 \cdot 1,01^5 + 150 \cdot 1,01^4 = \text{R\$ } 313,74$$

E finalmente para o Luiz Felipe, o valor futuro será igual a:

$$VF_{Luiz Felipe} = 300 \cdot 1,01^3 = \text{R\$ } 309,09$$

Na [Tabela 12](#) a seguir, temos uma representação temporal que mostra o resultado final da nossa investigação.

Tabela 12: Resultado das estratégias de investimento de cada estudante.

	Valores investidos (R\$)					Valor retirado
	Julho	Agosto	Setembro	Outubro	Novembro	Dezembro
Giovana	100,00	100,00	100,00	—	—	312,19
Polyana	300,00	—	—	—	—	315,30
Juliana	150,00	150,00	—	—	—	313,74
Luiz Felipe	—	—	300,00	—	—	309,09



Objetivos Específicos

Demissão na pandemia

- Investigar situações financeiras que envolvem o valor do dinheiro no tempo, considerando o conceito de capitais equivalentes, neste caso um valor presente e um valor futuro.
- Resolver problemas relacionados aos capitais equivalentes.
- Analisar e tomar decisões em situações econômico-financeiras que envolvam o conceito de capitais equivalentes, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos.

Nota 11

Solução

Demissão na pandemia

a) Os R\$ 100.000,00 aplicados em um mês, a uma taxa de 0,5% resulta em um valor de R\$ 100.500,00, pois $1.000.000,00 \times (1 + 0,005) = R\$ 100.500,00$. Portanto, em maio de 2020, a empresa obteve o valor de $100.500 - 40.000 = R\$ 60.500,00$. A partir disto, R\$ 60.500,00 aplicados por três meses à mesma taxa de 0,5% ao mês, resulta em um montante de R\$ 61.412,05, pois $60.400(1 + 0,05)^3 = 61.412,05$. Então, a empresa, em agosto de 2020, ficaria com o valor de $61.412,05 - 60.000 = R\$ 1.412,05$

b) A empresa não agiu de forma correta, pois não cumpriu o prazo legal das obrigações trabalhistas desrespeitando os direitos dos trabalhadores e ainda se beneficiou com o rendimento de juros que não lhe pertencia quando não devolveu esse dinheiro para os trabalhadores juntamente com a indenização no mês em que o pagamento foi efetuado. É importante também analisar a situação do ponto de vista do empregador, ou seja, ainda que neste caso a empresa tinha dinheiro, em muitos outros isso não necessariamente ocorreu, e a falta de uma estratégia para ajudar a proteger pequenas empresas podem ter ajudado a aumentar as injustiças para os dois lados.

c) O impacto na vida dos trabalhadores foi que eles perderam dinheiro com o pagamento da empresa fora do prazo de direito, visto que a empresa não fez o

A partir dessa análise, podemos concluir que apesar de terem investido, nominalmente, a mesma quantia, ou seja, R\$ 300,00, o fato do tempo de investimento ter sido diferente modificou o valor futuro total em dezembro. Ou seja, aplicar 3 parcelas de R\$ 100,00 em diferentes datas (julho, agosto e setembro) não resultou no mesmo VF gerado por uma única aplicação de R\$ 300,00 (julho).

Veja ainda que, aplicar R\$ 300,00 em julho foi melhor financeiramente do que aplicar 3 de R\$ 100,00 (em julho, agosto e setembro, respectivamente). Por outro lado, essa aplicação em três parcelas foi melhor do que aplicar R\$ 300,00 em setembro.

Observamos que para essa situação, fazer a troca intertemporal o quanto antes, para valores nominais iguais e taxas iguais, gera resultados maiores. Em simples palavras: aprendemos aqui que o quanto antes investir, melhor o resultado final do ponto de vista do valor acumulado.



Para refletir

Será que esta frase sempre é verdadeira?

“O quanto antes investir, melhor o resultado final do ponto de vista do valor acumulado”

Essa situação aponta para uma característica muito importante quando trabalhamos com a transformação do dinheiro no tempo: só podemos somar capitais se eles estiverem referidos à mesma data. Por exemplo, na segunda estratégia apresentada, somamos o saldo inicial em um dado mês com o valor do depósito.

Um erro muito comum é tentar obter o valor acumulado na primeira estratégia, somando as três parcelas de R\$ 100,00, para depois calcular o valor futuro, usando 3 meses como tempo de aplicação, por exemplo. Isso não gera o valor futuro correto, pois cada parcela teve um tempo de aplicação diferente. Assim, se o dinheiro se transforma no tempo, então só podemos somar quantias se elas estiverem referidas à uma mesma data.

Praticando

Capitais Equivalentes

Atividade 19

Demissão na pandemia

Uma empresa demite 10 funcionários em abril de 2020, em função da pandemia, gerando um custo total com indenizações de R\$ 100 mil. Lamentavelmente, a empresa, mesmo dispondo dos recursos para pagar todas as indenizações, decide pagar dentro do prazo legal (maio de 2020) somente as indenizações de 5 desses funcionários, que totalizaram R\$ 40 mil, deixando para pagar as outras 5 indenizações, no valor total de R\$ 60 mil, 3 meses após essa primeira leva, ou seja, em agosto de 2020.

- a) Se os R\$ 100 mil foram aplicados a 0,5% ao mês, que valor a empresa ganhou com essa atitude de atrasar as indenizações dos trabalhadores?
- b) Como você avalia a atitude da empresa?
- c) Apresente possíveis impactos dessa atitude da empresa na vida dos trabalhadores que não tiveram seus direitos trabalhistas respeitados?



O enigma das taxas de juros invisíveis

Calinka comprou um equipamento para sua empresa que reduz a emissão de CO_2 na atmosfera, cujo preço de tabela era de R\$ 10.000,00. O vendedor lhe ofereceu 5% de desconto na compra à vista. Alternativamente, ela poderia pagar em duas vezes, sendo 40% do preço de tabela, um mês após a compra, e 60% deste preço dois meses após a compra.

- Qual o valor da taxa de juros embutida nessa operação?
- Se os percentuais fossem 20% e 80%, respectivamente, essa taxa seria maior ou menor? De quanto seria?

repassa o juro que rendeu cada indenização paga para eles.

Objetivos Específicos

O enigma das taxas de juros invisíveis

- Investigar situações financeiras que envolvem o valor do dinheiro no tempo, considerando o conceito de capitais equivalentes.
- Resolver problemas relacionados aos capitais equivalentes, neste caso a obtenção da taxa de juro de uma proposta de financiamento, na comparação com um valor descontado na compra à vista.

Sugestões e discussões

O enigma das taxas de juros invisíveis

Nessa atividade convidamos o aluno a pensar sobre taxa de juros embutidas em financiamentos diante do desconto no preço de tabela para pagamento à vista. O modelo matemático aqui resulta em uma equação do para o professor de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental, como para o do Ensino Médio quando aborda funções quadráticas ou progressões geométricas.

Como nosso intuito foi focar na discussão sobre a taxa de juro embutida, essa situação não aborda o tradicional problema de tomada de decisão entre comprar à vista e a prazo, o que demandaria uma taxa mínima de atratividade para o comprador, gerando uma complexidade que intencionalmente não queremos nessa atividade, e precisa de tempo para ser desenvolvida conforme aponta Muniz Jr. (2016a).

Nota 12



PARA O PROFESSOR: O VALOR DO DINHEIRO NO TEMPO: SÉRIES UNIFORMES

Objetivo geral

Investigar situações financeiras relacionadas a quantias iguais sendo pagas, ou recebidas, uniformemente no tempo, tais como empréstimos, financiamentos, investimentos, previdência, consórcios, dentre outros.

Conceitos abordados

Séries uniformes, anuidades e progressões geométricas, através das habilidades:

EM13MAT203 Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

EM13MAT507 Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

EM13MAT508 Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Recomendações para o professor

Organização em sala de aula Nessa seção vamos investigar situações financeiras em que podemos ter um capital se transformando em uma série uniforme, ou seja, uma série de valores iguais, igualmente distribuídos no tempo. Comprar um produto hoje, que custa 3.000,00 reais à vista, optando por pagar em 12 prestações, é uma troca intertemporal (leva hoje e paga no futuro) que exige determinar como transformar 3.000,00 reais em 12 parcelas mensais e iguais (série uniforme). Como fazer essa transformação, considerando uma taxa de juro de 3% ao mês?

Um erro muito comum é calcular quanto vale R\$ 3.000,00 daqui a 12 meses e dividir por 12. Ou seja, calcular $3.000 \times 1,0312 = R\$ 4.277,28$ e dividir isso por 12. O erro, nesse caso, consiste em desconsiderar que a cada mês o saldo devedor diminui. A prestação calculada é maior do que realmente é, gerando prejuízo para o pagador.

Uma estratégia correta é considerar a soma dos valores atuais de cada prestação; outra solução é somar os valores futuros de cada prestação. Ou ainda, analisar o fluxo dos capitais mês a mês, atualizando e amortizando a dívida, todo mês. Independente do caminho, todos eles vão recair na soma de uma progressão geométrica.

Dificuldades previstas Os cálculos agora são bem mais complexos, e podem demandar maior manipulação algébrica envolvendo equações fracionárias. Use e abuse da calculadora, principalmente a científica disponível no smartphone dos estudantes.

Sugestões gerais Não trabalhe apenas com empréstimos ou financiamentos. Diversifique os exemplos. Uma poupança programada (todo mês investe uma mesma quantia, à uma mesma taxa) é um bom exemplo de série uniforme. Investir o dinheiro de um aluguel recebido, é outro exemplo. Pensar no planejamento de uma previdência complementar (vai juntando e investindo um pouquinho a cada mês) é outro excelente exemplo.

Enriquecendo a discussão O uso da calculadora do cidadão, disponível na play store ou na apple stores, bem como no site do Banco Central, pode enriquecer a aula, além de ajudar, e muito, nos cálculos nesse tipo de problema.



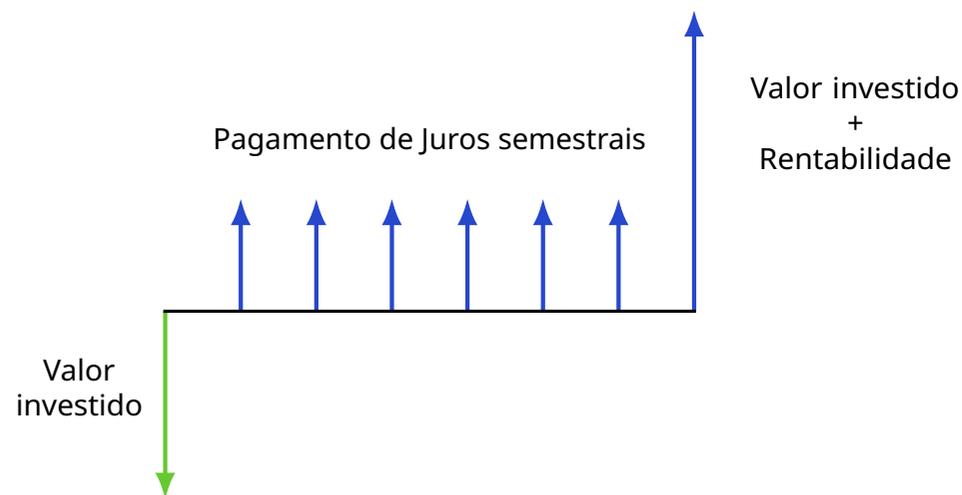
5 SÉRIES UNIFORMES

É muito comum vermos produtos e serviços sendo oferecidos com opções de pagamento em prestações mensais e iguais. Ou ainda, situações em que pessoas depositam mensalmente uma mesma quantia para gerar um acumulado, quer seja para aposentadoria, quer seja para a compra de um carro, um consórcio, ou outro bem, com a incidência de juros, ou não, nas operações financeiras. Você verá que as trocas intertemporais atacam novamente. A figura a seguir é um exemplo desse tipo de situação.



Mas não são apenas situações de consumo de bens ou serviços. Há investimentos que nos fornecem a opção de recebermos quantias iguais periodicamente, tais como os títulos que pagam juros semestrais, conforme ilustrado na [Figura 10](#). Nesse caso, o investidor empresta dinheiro para o governo federal, que por sua vez promete pagar o que pegou emprestado, em uma ou mais parcelas, ao longo do tempo.

Figura 10: Tesouro Prefixado com Juros Semestrais (NTN-F).



Para começarmos a trabalhar os aspectos matemáticos envolvidos nessas séries de pagamentos iguais e igualmente distribuídos no tempo, chamadas de séries uniformes, bem como aspectos financeiros, econômicos, comportamentais, culturais e sociais presentes nas variadas situações em que as séries uniformes estão presentes, convidamos você a pensar com a gente nessas novas trocas intertemporais.

Vamos começar com a seguinte atividade.



Objetivos Específicos

Disciplina e paciência: nascidas uma para a outra!

- Investigar situações financeiras que envolvem o valor do dinheiro no tempo, considerando as Séries Uniformes.
- Resolver problemas relacionados às Séries Uniformes.
- Analisar como o valor futuro da série é sensível ao tempo de aplicação, por meio de simulações (uma introdução à análise de sensibilidade)

Sugestões e discussões

Disciplina e paciência: nascidas uma para a outra!

Nesta atividade disparadora da seção sobre séries uniformes convidamos o estudante a analisar uma SEF envolvendo uma poupança programada. Deixe os estudantes fazerem estimativas. Se eles não estão familiarizados com o tema, provavelmente apresentarão resultados diferentes do verdadeiro. Ótimo se isso acontecer, pois os modelos aqui são mais elaborados, e as estimativas erradas são excelentes oportunidades de aprendizagem e avaliação do modelo quando ele for construído. Também queremos convidar o estudante a perceber como o tempo influencia no Valor Futuro da Série Uniforme.

Solução

Disciplina e paciência: nascidas uma para a outra!

A Atividade será detalhadamente investigada no organizando as ideias.

Atividade 21

Disciplina e paciência: nascidas uma para a outra!

Considere que Isabel começou a planejar uma poupança para realizar alguns sonhos. Para isso resolveu que, a partir de janeiro do próximo ano, aplicará mensalmente R\$ 300,00 em um investimento com rentabilidade de 1 % ao mês.

- Quanto Isabel terá acumulado exatamente após o 4º depósito, ou seja, em abril do próximo ano?
- E se o tempo de aplicação for de 1 ano? E 20 anos?

Organizando

Séries Uniformes

Vamos analisar a situação financeira proposta anteriormente, que envolve uma série de depósitos mensais e iguais, denominada de série uniforme. São as famosas prestações mensais e iguais, muito comuns em financiamentos dos mais variados tipos de produtos e serviços, de eletrodomésticos, carros, a pacote de férias e seguros. Essa é a última situação que analisaremos antes de passarmos para uma investigação da [Atividade 12](#).

Vamos começar investigando quanto Isabel terá acumulado imediatamente após o 4º depósito, ou seja, em abril do próximo ano.

A representação temporal a seguir ilustra o fluxo de depósitos que será realizado no período de janeiro a abril, bem como o valor futuro de cada quantia depositada nesses quatro meses.

Tabela 13: Fluxo de depósitos de Isabel.

Valores (R\$)			
Janeiro	Fevereiro	Março	Abril
300,00			→ 309,09
	300,00		→ 306,03
		300,00	→ 303,00
			300,00
		Total	1.218,12

Assim, o valor futuro total imediatamente após os 4 depósitos pode ser calculado somando-se o valor futuro de cada depósito em abril daquele ano,

$$VF_4 = 300 \times 1,01^3 + 300 \times 1,01^2 + 300 \times 1,01^1 + 300 = \text{R\$ } 1.218,12$$

Em vez de calcular essas quatro parcelas e somá-las, também poderíamos pensar assim:

$$VF_4 = 300 \times 1,01^3 + 300 \times 1,01^2 + 300 \times 1,01^1 + 300.$$



Multiplicando ambos os lados da equação por 1,01, temos:

$$1,01 \times VF_4 = 300 \times 1,01^4 + 300 \times 1,01^3 + 300 \times 1,01^2 + 300 \times 1,10.$$

Subtraindo as duas equações, chegamos ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned} 1,01 \times VF_4 - VF_4 &= 300 \times 1,01^4 - 300 \\ VF_4(1,01 - 1) &= 300(1,01^4 - 1) \\ VF_4 &= \frac{300(1,01^4 - 1)}{1,01 - 1} = \text{R\$ } 1.218,12. \end{aligned}$$

Ainda poderíamos resolver por um terceiro caminho, que é perceber que essa sequência de pagamentos é uma progressão geométrica (PG), com o primeiro termo igual a 300 e razão igual 1,01.

Observação

Você percebeu que temos uma soma de uma PG?

Nesse caso, o VF é igual à soma dos primeiros quatro termos dessa progressão geométrica. Assim, também podemos calcular o valor futuro usando o seguinte resultado.

Dada uma progressão geométrica, de termo inicial a_1 e razão q , a soma dos n primeiros termos dessa progressão é dada por:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + qa_1 + q^2a_1 + q^3a_1 + \dots + q^{n-1}a_1 \\ qS_n &= qa_1 + q^2a_1 + q^3a_1 + \dots + q^{n-1}a_1 + q^na_1 \\ qS_n - S_n &= q^na_1 - a_1 \\ S_n &= a_1 \frac{(q^n - 1)}{q - 1}. \end{aligned}$$

Assim, usando essa expressão que fornece a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica, o valor VF pode ser obtido por:

$$\begin{aligned} VF_4 &= \frac{300(1,01^4 - 1)}{1,01 - 1} \\ VF_4 &= \text{R\$ } 1.218,12. \end{aligned}$$

Você percebeu que usamos três formas diferentes para calcular o VF , nesta situação financeira?

Repare que a estratégia usada na segunda forma foi exatamente a que usamos para demonstrar a fórmula da Soma da PG presente na terceira forma.

Usar a fórmula pode agilizar os cálculos do VF envolvendo um número maior de depósitos.

Por exemplo, se os depósitos continuarem, mantendo-se a mesma taxa, temos que o VF imediatamente após o 12º depósito será igual a:

$$\begin{aligned} VF_{12} &= \frac{300(1,01^{12} - 1)}{1,01 - 1} \\ VF_{12} &= \text{R\$ } 3.804,75. \end{aligned}$$



E para um prazo ainda maior, de 240 meses (20 anos) de depósitos (haja disciplina e paciência!), usando a mesma lógica da operação anterior, temos que o VF imediatamente após o 240º depósito, é igual a:

$$VF_{240} = \frac{300(1,01^{240} - 1)}{1,01 - 1}$$

$$VF_{240} = \text{R\$ } 296.776,61.$$

Esse valor nos mostra que as 240 aplicações de 300,00 reais, realizadas todos os meses, geraram quase 300 mil reais ao final do período, a uma taxa de 1 % ao mês.

Podemos também usar calculadoras que calculam diretamente esses valores. Algumas delas estão disponíveis dentro de simuladores. Um deles é a calculadora do Banco Central, disponível no site e como aplicativo para smartphone.

Na figura a seguir, temos uma simulação usando planilha eletrônica.

	A	B		A	B
1	Taxa mensal	1%	1	Taxa mensal	1%
2	Número de depósitos	240	2	Número de depósitos	240
3	Depósito mensal	300	3	Depósito mensal	300
4	Valor na data do último depósito	=VF(B1;B2;-B3)	4	Valor na data do último depósito	R\$ 296.776,61

Já se utilizarmos a calculadora do cidadão, temos o seguinte resultado.

Figura 11: Calculadora do cidadão. Função de aplicação através de depósitos regulares.

Aplicação com depósitos regulares

Simule a aplicação com depósitos regulares

Número de meses	<input type="text" value="240"/>
Taxa de juros mensal	<input type="text" value="1,000000"/> %
Valor do depósito regular (depósito realizado no início do mês)	<input type="text" value="300,00"/>
Valor obtido ao final	<input type="text" value="299.744,38"/>

[Metodologia](#)

Fonte: Banco Central do Brasil (2023a).

Repare que os valores são diferentes. Por que isso aconteceu?

Na metodologia usada no app do Banco Central, o valor futuro não se refere à data do último depósito, mas sim, um mês após. Ou seja, supondo que primeiro valor de R\$ 300,00 tenha sido depositado em janeiro de 2022 e o último em dezembro de 2041, no Excel, a função VF calcula o acumulado em dezembro de 2041, logo após o último depósito, e a calculadora do cidadão calcula o acumulado em janeiro de 2042. De fato, o acumulado até dezembro de 2041, se transforma em $296.766,61 \times 1,01 = \text{R\$ } 299.744,38$ em janeiro de 2042.

Mas será que essa taxa de 1 % ao mês realmente existe e está acessível a todos? Isso vai depender de diversos fatores, dentre eles do momento econômico. Em março de 2016, por exemplo, essa taxa era acessível a qualquer cidadão que fizesse um investimento chamado tesouro pré-fixado, que pagava à época 14,47 % ao ano, conforme mostra a [Tabela 14](#).



Tabela 14: Preços e taxas dos títulos públicos disponíveis para compra.

Título	Vencimento	Taxa de compra (% a.a.)	Preço unitário de compra (R\$)
Indexados ao Índice de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA)			
Tesouro IPCA+ 2020 (NTN-B Princ)	15/05/2019	6,04	2357,08
Tesouro IPCA+ 2024 (NTN-B Princ)	15/08/2024	6,49	1672,62
Tesouro IPCA+ com Juros Semestrais 2026 (NTN-B)	15/08/2026	6,48	2751,98
Tesouro IPCA+ com Juros Semestrais 2035 (NTN-B)	15/05/2035	6,59	2719,99
Tesouro IPCA+ 2035 (NTN-B Princ)	15/05/2035	6,69	833,86
Tesouro IPCA+ com Juros Semestrais 2050 (NTN-B)	15/08/2050	6,58	2636,42
Prefixados			
Tesouro Prefixado 2019 (LTN)	01/01/2023	14,47	684,44
Tesouro Prefixado 2023 (LTN)	01/01/2023	14,66	394,58
Tesouro Prefixado com Juros Semestrais 2027 (NTN-F)	01/01/2027	14,73	776,56
Indexados à Selic			
Tesouro Selic 2021 (LFT)	01/03/2021	0,01	7573,37

Dados do Tesouro Nacional. Acesso em 04/03/2016.

Entretanto, três anos depois, em setembro de 2019, a taxa de 1 % ao mês já não estava mais disponível, e o mesmo tipo de título prefixado pagava 5,97 % ao ano, conforme se pode observar na [Tabela 15](#).

Tabela 15: Preços e taxas dos títulos públicos disponível para investir.

Título	Vencimento	Taxa de Rendimento (% a.a.)	Valor Mínimo (R\$)	Preço Unitário (R\$)
Indexados ao Índice de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA)				
Tesouro IPCA+ 2024 (NTN-B Princ)	15/08/2024	IPCA+2,97	56,07	2803,71
Tesouro IPCA+ 2035 (NTN-B Princ)	15/05/2035	IPCA+3,66	36,92	1846,07
Tesouro IPCA+ 2045 (NTN-B Princ)	15/05/2045	IPCA+3,66	38,69	1289,94
Tesouro IPCA+ com Juros Semestrais 2026 (NTN-B)	15/08/2026	IPCA+3,12	38,16	3816,60

Continua na próxima página



Título	Vencimento	Taxa de Rendimento (% a.a.)	Valor Mínimo (R\$)	Preço Unitário (R\$)
Tesouro IPCA+ com Juros Semestrais 2035 (NTN-B)	15/05/2035	IPCA+3,53	42,40	4240,29
Tesouro IPCA+ com Juros Semestrais 2050 (NTN-B)	15/08/2050	IPCA+3,71	45,89	4589,86
Prefixados				
Tesouro Prefixado 2022 (LTN)	01/01/2022	5,97	34,97	874,25
Tesouro Prefixado 2025 (LTN)	01/01/2025	6,97	34,96	699,25
Tesouro Prefixado com Juros Semestrais 2029 (NTN-F)	01/01/2029	7,25	35,89	1196,57

Dados do Tesouro Nacional. Acesso em 04/03/2016.

Essas diferentes taxas podem gerar grandes diferenças no VF de uma série uniforme. Podemos investigar como a taxa influencia/impacta o VF total acumulado, realizando o que chamamos de análise de sensibilidade, que é uma simulação do VF para diferentes taxas. A tabela e o gráfico a seguir ilustram uma análise de sensibilidade para o caso de 240 depósitos mensais de 300,00 reais.

Taxa mensal (% a.m.)	Valor futuro (R\$)
0,40	120.502,51
0,50	138.612,27
0,60	160.128,70
0,70	185.752,34
0,80	216.339,37
0,90	252.925,33
1,00	296.776,61
1,50	692.656,31
2,00	1.723.331,03
2,50	4.484.855,58
3,00	12.038.526,28
5,00	730.431.442,45

As simulações nos permitem fazer uma análise de sensibilidade do valor acumulado (VF) em relação à taxa de retorno do investimento, para um mesmo prazo. Elas nos mostram que, para uma taxa de 0,5 %, o VF é de R\$ 138 mil, menos que a metade dos R\$ 297 mil obtidos na atividade que trazia uma taxa de 1,0 % ao mês.



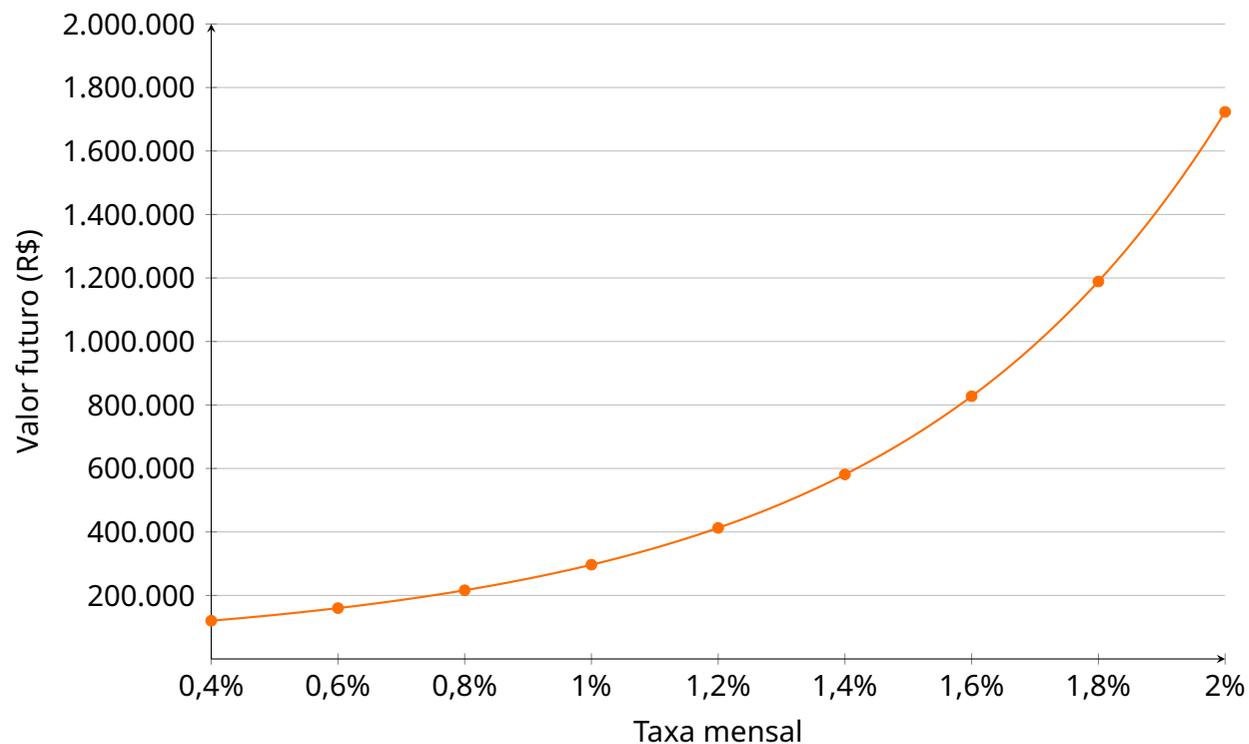


Figura 12: Sensibilidade do valor futuro à taxa mensal de retorno.

Mas como obter taxas maiores? Uma das formas de se tentar obter maiores taxas de retorno é considerar investimentos mais arriscados. Mas isso é conversa para a próxima seção



Você Sabia?

A taxa de 0,5% ao mês foi aproximadamente a remuneração da poupança — modalidade de “investimento” mais popular entre os brasileiros, em setembro de 2019.

Retomando a Atividade 12

Você tem duas possibilidades de fazer uma poupança:

- Investir 200,00 reais por mês durante 20 anos
- Investir 400,00 reais por mês durante 10 anos, parar de depositar, deixando o acumulado rendendo até completar 20 anos.

Considere que o dinheiro renda 1% ao mês, rendendo sempre sobre o saldo acumulado da sua poupança.

- a) Qual estratégia gera o maior valor acumulado ao final de 20 anos?
- b) Qual a melhor estratégia do seu ponto de vista? Justifique sua resposta
- c) O que isso tem a ver com a discussão atual (2019) sobre a reforma da previdência?

Para responder à primeira pergunta, basta observar que, como o valor nominal investido é o mesmo, e a taxa também é a mesma em ambas, o quanto antes investirmos, melhor. Logo a segunda gera um valor futuro maior.



Também poderíamos usar matemática para encontrar a estratégia que gera o maior valor acumulado. Para isso, basta calcular o valor futuro das séries uniformes produzidas em cada estratégia.

Para a primeira estratégia, vamos admitir, sem perda de generalidade, que, o primeiro depósito de R\$ 200,00 seja realizado em janeiro de 2020 e o último em dezembro de 2039. Assim, o VF dessa série uniforme em dezembro de 2039 será, imediatamente após o último depósito, será igual a

$$VF_1 = \frac{200(1,01^{240} - 1)}{1,01 - 1}$$
$$VF_1 = \text{R\$ } 197.851,08.$$

Na segunda estratégia, temos duas fases de investimento, em que o valor futuro da série uniforme com prazo de 120 meses, obtido em dezembro de 2029, é atualizado por mais 120 meses, até dezembro de 2039. Logo,

$$VF_2 = \frac{400(1,01^{120} - 1)}{1,01 - 1} \times 1,01^{120}$$
$$VF_2 = \text{R\$ } 303.686,67$$

Os cálculos nos levam ao que já sabíamos, sem fazer as contas: a segunda estratégia é mais vantajosa do ponto de vista do valor acumulado ao final do período.

A segunda pergunta, é aberta. Ela pode parecer sem sentido, mas não é. Para quem tem dificuldades orçamentárias (ou tem rendas menores) a primeira estratégia pode ser a melhor por ser a mais viável, ou a menos sacrificante. Do ponto de vista comportamental, pode ser mais fácil manter a disciplina de guardar R\$ 200,00 mensais do que R\$ 400,00. Isso vai depender de uma série de fatores orçamentários, comportamentais e aleatórios — a probabilidade de conseguir gerir uma saída de caixa de R\$ 200,00, diante de imprevistos e demandas não planejadas é a mesma com uma saída de R\$ 400,00?

A terceira pergunta nos convida a refletirmos sobre as variáveis: tempo de contribuição e valor de contribuição.



Para refletir

Se não podemos, em muitos casos, obter taxas maiores sem pôr em risco o dinheiro poupado, então será que podemos ampliar o tempo de contribuição, começando a investir antes por exemplo?

É possível, num país como o Brasil, começar a poupar mais cedo? O valor futuro acumulado será suficiente para gerar os pagamentos mínimos necessários, no período de recebimentos? Essas são questões importantes, e com as quais a população tem se preocupado em 2020 devido às novas regras previdenciárias.

Agora, vamos entender como as séries uniformes estão relacionadas com os financiamentos (ou investimentos) em parcelas iguais e periódicas, dado o valor financiado, o prazo e a taxa de juro envolvida.



É muito comum vermos bens e serviços sendo oferecidos com opções de pagamento em parcelas mensais e iguais. Você já comprou algum produto em parcelas iguais? Ou pagou algum serviço parcelado no cartão de crédito em parcelas iguais?

Também temos situações, quando enfrentamos problemas financeiros por exemplo, em que dívidas podem ser renegociadas e pagas em parcelas mensais e iguais. A renegociação de dívidas contraídas durante a pandemia, por exemplo, pelo não pagamento de contas de luz, água, telefone, aluguel, fatura do cartão, dentre outros serviços foi o caminho usado por muitos brasileiros para quitar dívidas.

Como saber se a prestação do financiamento está correta? Como saber o número mínimo de prestações a serem pagas, diante do que posso pagar por mês? Como saber se a taxa de juro anunciada em um empréstimo a ser pago em parcelas iguais é a que realmente estão te cobrando? Um primeiro caminho é usar tecnologia disponível para ajudar a fazer os cálculos.

Vamos a um exemplo. Suponha que uma pessoa comprou um produto, cujo preço à vista sem desconto é de R\$ 2.000,00, em 10 prestações mensais e iguais a uma taxa de juro de 2% ao mês, com a primeira prestação sendo paga um mês após a compra. Qual o valor da prestação nesse caso?

Usando a calculadora do cidadão, disponível em <https://www.bcb.gov.br/acesoinformacao/calculadoradocidadao>, basta inserir os valores dessas variáveis.



Aplicação com depósitos regulares

É a situação de aplicações mensais e de mesmo valor, considerando uma determinada taxa de juros, obtendo o valor ao final do número de meses.



Financiamento com prestações fixas

São os pagamentos mensais e de mesmo valor, considerando certa taxa de juros, liquidando um valor financiado após o número de meses.



Valor futuro de capital

É a situação que um valor atual é projetado no futuro, considerando uma certa taxa de juros, obtendo o valor ao fim do número de meses.



Correção de valores

Atualize uma quantia, usando a remuneração da poupança, o índice de inflação, a taxa Selic entre outras possibilidades.

Figura 13: Funções da calculadora do cidadão.

Clicando em Financiamento com Prestações fixas, podemos fazer a simulação, como mostram as Figuras 14 e 15.



Financiamento com prestações fixas

Simule o financiamento com prestações fixas

Nº. de meses	<input type="text" value="10"/>	
Taxa de juros mensal	<input type="text" value="2"/>	%
Valor da prestação (Considera-se que a 1a. prestação não seja no ato)	<input type="text"/>	
Valor financiado (O valor financiado não inclui o valor da entrada)	<input type="text" value="2000,00"/>	

[Metodologia](#)

Figura 14: Calculadora de financiamento com prestações físicas.

Financiamento com prestações fixas

Simule o financiamento com prestações fixas

Nº. de meses	<input type="text" value="10"/>	
Taxa de juros mensal	<input type="text" value="2,000000"/>	%
Valor da prestação (Considera-se que a 1a. prestação não seja no ato)	<input type="text" value="222,65"/>	
Valor financiado (O valor financiado não inclui o valor da entrada)	<input type="text" value="2.000,00"/>	

[Metodologia](#)

Figura 15: Resultado do cálculo.

O total desse financiamento de 10,00 parcelas de 222,65 reais é 2.226,50 reais, sendo 226,50 de juros.

Pela simulação, o valor da prestação é de R\$ 222,65. Usar o simulador é uma forma rápida, prática e segura de se avaliar o valor da prestação e verificar se ela está de acordo com o que está sendo oferecido.

Outra vantagem desse simulador é poder calcular qualquer uma das quatro variáveis envolvidas: prestação, taxa, valor financiado e prazo, em financiamentos de parcelas iguais com a primeira sendo paga um mês a compra, sabendo-se os valores de três delas.

Uma estratégia semelhante a esta, está disponível nas planilhas eletrônicas ou nas calculadoras financeiras. No caso das planilhas, o mesmo problema poderia ser resolvido usando uma função financeira chamada $PGTO(\text{taxa}, \text{nper}, \text{vp}, [\text{vf}], [\text{tipo}])$ no programa *Excel* (ou PMT em inglês e no *Google Sheets*), onde *taxa* é a taxa de juros, *nper* é o número de pagamentos e *vp* é o valor presente. Os parâmetros $[\text{vf}]$ e $[\text{tipo}]$ são opcionais e representam o valor futuro e valor lógico (1 para início do período ou 0 para final do período), respectivamente.

No *Excel*, isso pode ser feito de duas formas:

- na primeira basta escrever na célula o comando “=PGTO(2%;10;2000)” (é possível também colocar as células correspondentes no lugar dos valores) e teclar *Enter*, como na [Figura 16](#);
- na segunda, é possível abrir uma janela de função de inserção (através do botão “fx”), que fornece um tutorial, assim como na calculadora do cidadão, conforme ilustra a [Figura 17](#).



	A	B	C
1	Valor Financiado	R\$ 2.000,00	
2	Prazo	10	
3	Taxa	2%	
4	Prestação	=PGTO(2%;10;2000)	
5			
6	Valor Financiado	R\$ 2.000,00	
7	Prazo	10	
8	Taxa	2%	
9	Prestação	=PGTO(B8;B7;B6)	
10			
11			
12			
13			

Figura 16: Comando escrito na célula.

Função de inserção

PGTO
Calcula o pagamento de um empréstimo com base em pagamentos e em uma taxa de juros constantes. [Saiba mais](#)

Argumentos da função

taxa *

nper *

vp *

taxa: é a taxa de juros por período de um empréstimo. Por exemplo, use 6%/4 para pagamentos trimestrais a uma taxa de 6% TPA

Enviar comentários Inserir Voltar

Figura 17: Função de inserção do Excel.

Como resolver matematicamente esse problema? Podemos usar a mesma noção de equivalência de capitais usada para analisar o VF de uma série uniforme.

Nosso problema é transformar R\$ 2.000,00 hoje em 10 prestações mensais e iguais, sendo a primeira paga um mês após a data da compra.

Uma forma de abordar o problema é pensar que o valor de 2.000,00 reais será dividido em 10 partes na data da compra, e cada parte será paga nos próximos 10 meses, uma em cada mês. Cada parte é o quanto vale hoje cada uma das prestações. Lembrando que a uma taxa de 2% ao mês, R\$ 100,00 hoje valem R\$ 102,00 daqui a um mês, pois $100 \times 1,02 = 102$, da mesma forma que $\frac{102}{1,02} = 100$, então podemos aplicar essa operação para todas as prestações.

A primeira prestação vale P daqui a 1 mês. Quanto eu preciso pegar emprestado hoje, para dever P reais daqui a 1 mês? A resposta é $\frac{P}{1,02}$.

A segunda prestação vale P reais daqui a 2 meses. Quanto eu preciso pegar emprestado hoje, para dever P reais daqui a 2 meses? A resposta é $\frac{P}{1,02^2}$.

Repetindo o processo para cada uma das dez prestações temos, pela equivalência de capitais, a seguinte igualdade:

$$\frac{P}{1,02} + \frac{P}{1,02^2} + \frac{P}{1,02^3} + \frac{P}{1,02^4} + \dots + \frac{P}{1,02^9} + \frac{P}{1,02^{10}} = 2000.$$

Isso é o mesmo que:

$$\frac{P}{1,02^{10}} + \frac{P}{1,02^9} + \dots + \frac{P}{1,02^2} + \frac{P}{1,02} = 2000.$$



Observe que temos no lado esquerdo da igualdade uma soma de 10 termos de uma progressão geométrica, de razão 1,02 e termo inicial $\frac{P}{1,02^{10}}$. Aplicando a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PG, temos

$$S_n = a_1 \frac{(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$2000 = \frac{P}{1,02^{10}} \cdot \frac{(1,02^{10} - 1)}{(1,02 - 1)}$$

$$P = \frac{2000 \cdot 1,02^{10} \cdot 0,02}{(1,02^{10} - 1)}$$

$$= \text{R\$ } 222,65.$$

Para finalizar, vamos generalizar alguns resultados sobre séries uniformes, a partir das experiências com as investigações anteriores.

De um modo geral, o valor que se precisa investir hoje, para receber n quantias iguais a P , em suas respectivas datas, ao longo do tempo, é igual ao somatório do valor de cada uma das parcelas hoje.

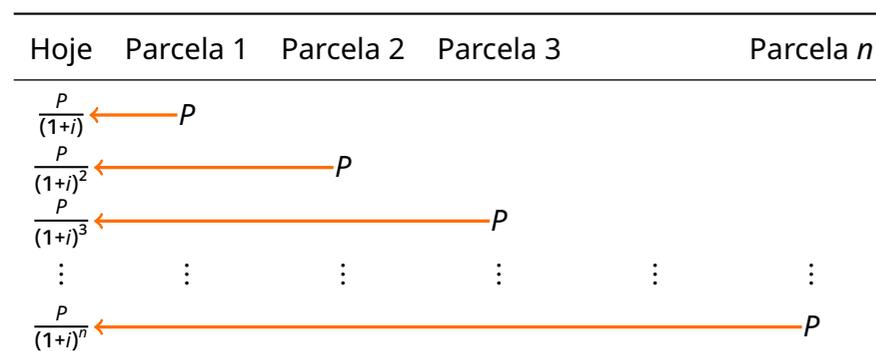


Para refletir

Quanto vale uma série de n recebimentos mensais e iguais a P , a uma taxa i , um período antes dela começar?

O valor Presente de uma série uniforme, chamado de Valor Atual da Série uniforme, um período antes dela começar é igual ao somatório do valor presente de cada uma das parcelas.

Para responder a essa pergunta, podemos pensar em cada parcela separadamente e descobrir quanto precisamos depositar hoje para receber P daqui a um mês, dois meses, três meses e assim por diante até n meses. Ou seja, podemos calcular o valor presente de cada uma das parcelas de valor P . O esquema abaixo ilustra esse movimento do dinheiro no tempo.



Assim, o valor atual (A) de uma série de n parcelas iguais e igualmente espaçadas, um período antes dela começar, é igual à soma dos valores presentes de cada uma das parcelas.

Assim, podemos concluir que

$$A = \frac{P}{(1+i)} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \dots + \frac{P}{(1+i)^n}.$$



Usando a fórmula da soma dos n termos de uma PG, temos

$$A = \frac{P}{(1+i)^n} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$
$$A = \frac{P}{(1+i)^n} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Esse é o valor atual de uma série de n parcelas iguais a P , um período antes dela começar.

Com essa expressão, podemos analisar diversas situações envolvendo as séries uniformes, incluindo as situações envolvendo as tão famosas compras em parcelas mensais e iguais com juros. Determinar o valor da prestação, a taxa de juros embutida em um financiamento, e o prazo necessário para se atingir metas nessas situações, também podem ser feitas por meio dessa expressão.



Para refletir

Podemos ainda, a partir do valor atual da série, obter o valor futuro (VF) da mesma série, ou seja, o valor da série na data da última parcela (incluindo-a). Para isso, basta multiplicar o valor atual por $(1+i)^n$.

Nesse caso, teríamos:

$$VF = A \cdot (1+i)^n$$
$$VF = \frac{P}{(1+i)^n} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i)^n$$
$$VF = P \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Veja que essa expressão é a generalização do que tínhamos obtido como solução para a última atividade, a partir da soma de uma progressão geométrica.

$$VF = \frac{200(1,01^{240} - 1)}{0,01}$$
$$VF = \text{R\$ } 197.851,07$$

Vemos aqui que podemos usar diferentes objetos matemáticos, diferentes operações e com suas lógicas, para produzir significados e investigar a situação financeira posta por diferentes caminhos.

Na última atividade, vamos refletir sobre objetos matemáticos, operações e lógicas diferentes para produzir significados e investigar a situação financeira posta por diferentes caminhos.



Objetivos Específicos

O dilema de caber no bolso — parcelas mensais e iguais

- Investigar situações financeiras que envolvem o valor do dinheiro no tempo, considerando as Séries Uniformes
- Resolver problemas relacionados às Séries Uniformes.
- Analisar como a taxa de retorno da pessoa, caso possua dinheiro investido, pode influenciar na tomada de decisão em parcelamentos mais longos.

Solução

O dilema de caber no bolso — parcelas mensais e iguais

- a) Resposta pessoal.
- b) Resposta pessoal.
- c) O valor à vista é de R\$ 829,45; a taxa de juros de 1,29% ao mês; o prazo de 12 meses. Para calcular o valor da prestação podemos usar:

$$A = \frac{P}{(1+i)^n} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Esse é o valor atual de uma série de n parcelas iguais a P , um período antes dela começar, a uma taxa i ao período.

Isolando P , temos

$$P = A \cdot \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}$$

$$P = 829,45 \cdot \frac{(1+0,0129)^{12} \cdot 0,0129}{(1+0,0129)^{12} - 1}$$

$$P = 829,45 \cdot 0,09048497$$

$$P = \text{R\$ } 75,05$$

- d) Impressionante e inexplicavelmente, no parcelamento apresentado, o valor do frete é considerado na história, e com isso $A = 849,00 + 22,90 = \text{R\$ } 871,90$. Perceba que o valor à vista tem um desconto. Mas isso não fica muito claro na tela final de compra. Recalculando, temos o seguinte:

$$P = A \cdot \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}$$

$$P = 871,90 \cdot \frac{(1+0,0129)^{12} \cdot 0,0129}{(1+0,0129)^{12} - 1}$$

$$P = 871,90 \cdot 0,09048497$$

$$P = \text{R\$ } 78,89$$

O dilema de caber no bolso — parcelas mensais e iguais

O Sr. Muniz resolveu comprar uma bike de presente para seu filho Arthur. Mas não vai conseguir pagar à vista dessa vez, como costuma fazer. Ele se planejou para pagar no máximo R\$ 100,00 de prestação, em um prazo máximo de um ano. A figura a seguir representa o valor da bike e as condições de parcelamento na compra a prazo.

Tabela 16: Opções de parcelamento do presente de Arthur.

Número de parcelas	Valor da parcela (R\$)	Juros (% a.m.)
1	829,45	—
2	435,94	—
3	290,63	—
4	217,98	—
5	174,38	—
6	145,32	—
7	124,56	—
8	115,41	1,29
9	99,32	0,50
10	89,61	0,50
11	85,53	1,29
12	78,89	1,29



- a) Qual opção de parcelamento você escolheria se estivesse no lugar do Sr. Muniz?
- b) Se você estivesse no lugar do Arthur e pudesse ajudar seu pai a escolher, qual seria a sua sugestão?
- c) Calcule o valor da prestação, considerando a compra em 12 vezes com juros de 1,29% a.m. e o valor de R\$ 829,45 com sendo o valor à vista.
- d) Por que o valor apresentado de R\$ 78,89 é maior que o calculado por você? Explique matematicamente, considerando as informações adicionais apresentadas que só aparecem para o cliente no final da tela de compra no site.



Resumo da compra

Produtos (1)

 **Bicicleta Aro 26 Houston Stinger com Suspensão Dianteira e 21 Marchas** • Quantidade: 1
 Produto Vendido e entregue por Casas Bahia • Normal 6 dias úteis Valor unitário: R\$ 849,00

Forma de entrega

 Normal

• Entrega em até 6 dias úteis R\$ 22,90

A nota fiscal será impressa com os mesmos dados.

Pagamento

 Cartão de crédito 12x com juros (1,29% a.m.) de R\$ 78,89

Valor Total R\$ 946,68

- e) Se o Sr. Muniz tivesse R\$ 1.000,00 aplicados a 0,6 % ao mês, qual das duas opções seria mais vantajosa (do ponto de vista exclusivamente financeiro)?
- Comprar em 9 parcelas de R\$ 99,32
 - Comprar em 10 parcelas de R\$ 89,61

Atividade 23

O que será o amanhã?

Suponha que uma pessoa vai completar 25 anos em janeiro de 2021 e planeja a partir dessa data investir mensalmente uma quantia fixa, de modo a assegurar uma aposentadoria complementar de 20 mil reais durante 15 anos, sendo o primeiro depósito em jan de 2021 e o último em dezembro de 2060. Considerando uma taxa média de retorno desses investimentos de 0,5 % a.m., uma expectativa de vida de 80 anos, e que o primeiro benefício seja recebido em janeiro de 2061 e o último em dezembro de 2075, determine:

- quais são os dois principais desafios para a concretização dessa estratégia, na sua opinião;
- quantos depósitos mensais ele fará até se aposentar e quantos benefícios ele receberá;
- o valor da quantia mensal a ser investida;
- Considerando uma inflação anual de 3 % ao ano, o poder de compra dos R\$ 20 mil será o mesmo que o poder de compra de R\$ 20 mil hoje (janeiro de 2021)? Se não tiver, ele será equivalente a quantos reais em janeiro de 2061?

e) Para tomar a decisão considerando a taxa de retorno de 0,6 % ao Mês do comprador, podemos dentre várias estratégias, calcular o valor atual dos fluxos por essa taxa. Assim, temos:

$$A = \frac{99,32}{1,006^9} \cdot \frac{(1,006^9 - 1)}{0,006}$$

$$A = 869,64$$

$$A = \frac{89,61}{1,006^{10}} \cdot \frac{(1,006^{10} - 1)}{0,006}$$

$$A = R\$ 867,22$$

Veja que é mais vantajoso, ainda que a diferença seja nesse caso muito pequena, pagar em 10 vezes. Uma outra forma de olhar: posso pagar um valor mais baixo com um prazo um pouco maior, gastando praticamente a mesma coisa se eu levar em conta o valor do dinheiro no tempo. Ou seja, ele pode optar por pagar mais folgado levando em conta o dinheiro que tem, se pagar em 10 vezes.

Além disso, observe que se um aluno somasse o valor das prestações ele acharia que a mais vantajoso do ponto de vista financeiro é pagar em 9 vezes.

$$9 \cdot 99,32 = R\$ 893,88$$

$$10 \cdot 89,61 = R\$ 896,10$$

Mas dessa forma tomaria uma decisão diferente daquela levando em consideração o dinheiro no tempo.

Nota 13

Objetivos Específicos

O que será o amanhã?

■ Investigar situações financeiras que envolvem o valor do dinheiro no tempo, considerando as Séries Uniformes

■ Resolver problemas relacionados às Séries Uniformes.

■ Analisar como o valor futuro da série é sensível ao tempo de aplicação, por meio de algumas simulações (uma introdução à análise de sensibilidade)

Nota 14



PARA O PROFESSOR: VELOZES E FURIOSAS: TAXAS DE JUROS NO CENÁRIO BRASILEIRO

Objetivos gerais

- Investigar situações financeiras que envolvem o valor do dinheiro no tempo, considerando taxas equivalente, levando em consideração o contexto brasileiro.

Conceitos abordados: taxas de juros, equivalência de taxas e progressões geométricas, através das habilidades

Habilidades da BNCC

EM13MAT101 Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

EM13MAT104 Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.

EM13MAT203 Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

Recomendações para o professor

Organização em sala de aula Esta seção trata de taxas de juros. As taxas de juros do crédito no Brasil são exorbitantes, quando comparadas ao cenário mundial. As do cartão de crédito entre as cinco maiores do mundo. Convidar os estudantes a refletirem sobre essa situação econômica brasileira pode ser um excelente ponto de partida, considerando a realidade econômica dos estudantes.

Acesse com os estudantes, ou sugira uma pesquisa, no site do Banco Central, sobre taxas de juro praticadas no Brasil. O endereço é <https://www.bcb.gov.br/estatisticas/txjuros>.

Nele é possível ter acesso a taxas de juros praticadas pelos 30 maiores Bancos Brasileiros, nas duas semanas anteriores à data de consulta, em diversas modalidades de crédito, tais como cheque especial PF e PJ, rotativo do cartão de crédito PF, Consignado, Financiamento de veículos, dentre outras.

Taxas pré-fixadas de pessoa física:

- aquisição de outros bens;
- aquisição de veículos;
- cartão de crédito parcelado;
- cartão de crédito rotativo;
- cheque especial;
- crédito pessoal consignado Instituto Nacional do Seguro Social (INSS);



- crédito pessoal consignado privado;
- crédito pessoal consignado público;
- crédito pessoal não consignado;
- desconto de cheques;
- financiamento imobiliário com taxas sde mercado;
- financiamento imobiliário com taxas reguladas;
- leasing de veículos.

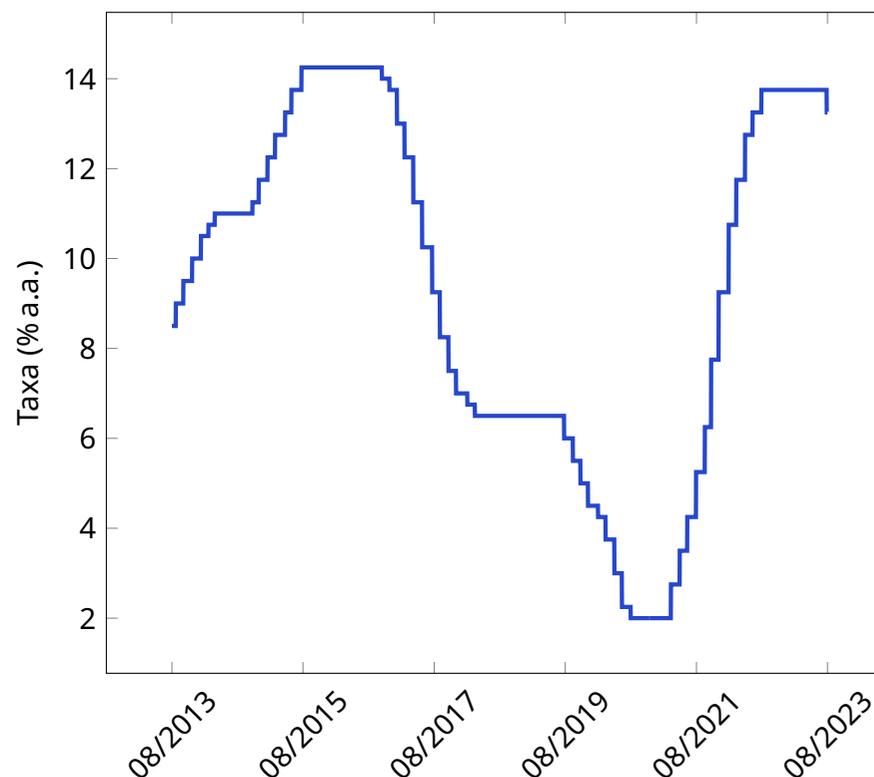
Dificuldades previstas Na abordagem das taxas de juros, os aumentos sucessivos geram produtos com números decimais, e em alguns casos, cálculos envolvendo exponenciais, incluindo as com expoentes fracionários. Essas operações costumam ser consideradas complexas pelos alunos de Ensino Médio, sendo dificuldades previstas na abordagem.

Sugestões gerais Trabalhar com o auxílio de tecnologia pode ajudar a superar as dificuldades apontadas, além de contribuir para a habilidade de resolver problemas matemáticos com apoio de calculadores, simuladores e planilhas eletrônicas.

Reforçar que taxas equivalentes derivam do conceito de juros compostos, os mais praticados no mercado. Porém a mente humana tende a linearizar taxas relacionadas a diferentes períodos, o que demanda do professor uma atenção especial que deve ser reforçada com os estudantes.

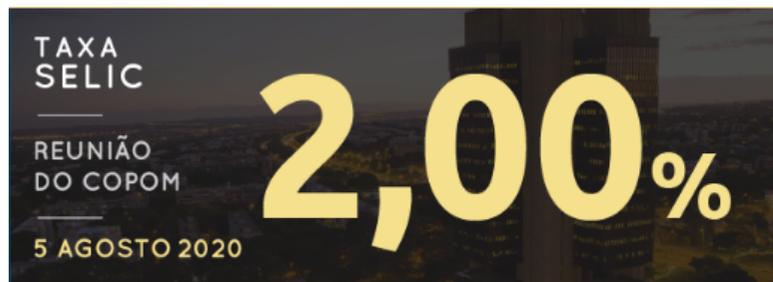
Enriquecimento da discussão Existem diferentes taxas de juros no Brasil. A taxa básica de juros da Economia Brasileira, que está em queda desde 2016, é usada para definir uma série de outras taxas de juros, tais como a poupança, títulos públicos, dentre outros. Ela atingiu em agosto de 2020 o menor patamar desde que foi criada, conforme mostra a [Figura P.2](#).

Figura P.2: Meta para a taxa Selic.



Dados diários do Banco Central do Brasil ([2023b](#)).





Temos as taxas de juros em relação ao crédito nas mais variadas modalidades. Temos as taxas de juros pagas pelos investimentos, tais como poupança, títulos do tesouro, fundos imobiliários, renda variável, etc.

Uma rápida busca no site do Banco Central nos mostra a variedade de taxas de juros cobradas para os diferentes tipos de crédito no Brasil.

Tabela P.1: Modalidades de crédito.

Pessoa Física	Pessoa jurídica
Taxas pré-fixadas	
Aquisição de outros bens	Antecipação de faturas de cartão de crédito
Aquisição de veículos	Capital de giro com prazo até 365 dias
Cartão de crédito parcelado	Capital de giro com prazo superior a 365 dias
Cartão de crédito rotativo não regular	Cheque especial
Cartão de crédito rotativo regular	Conta garantida
Cartão de crédito rotativo	Desconto de cheques
Cheque especial	Desconto de duplicata
Crédito pessoal consignado INSS	Vendor
Crédito pessoal consignado privado	Taxas pós-fixadas referenciada em juros flutuantes
Crédito pessoal consignado público	
Crédito pessoal não consignado	Capital de giro com prazo de até 365 dias
Desconto de cheques	Capital de giro com prazo superior a 365 dias
Financiamento imobiliário com taxas de mercado	Conta garantida
Financiamento imobiliário com taxas reguladas	Taxas pós-fixadas referenciada em moeda estrangeira
Leasing de veículos	Adiantamento sobre contratos de câmbio

Fonte: Banco Central do Brasil (2023c)

Por que é tão elevada a taxa de juros no Brasil, em especial o crédito para pessoa física? Não há consenso entre os economistas sobre as respostas para essa pergunta. Cada economista apresenta sua visão, conforme podemos ver no artigo de Ricardo de Menezes Barboza (2015), que é refutada ou questionada por outros economistas. Vejamos algumas explicações.



- Manter a inflação numa meta estabelecida, reduzir demanda para controlar a inflação, limitar a desvalorização cambial para evitar inflação de custos, induzir investidores a comprarem dívida pública (Luiz Carlos Bresser-Pereira & Yoshiaki Nakano, 2002).
- Incerteza jurisdicional, que é a dificuldade de determinar o nível de estabilidade e segurança dos contratos firmados nas leis de uma determinada jurisdição (Persio Arida et al., 2004), o que é contestado por Fernando M Gonçalves et al. (2007).
- Segmentação do mercado de crédito (Barboza, 2015).
- Baixa penetração do crédito livre dentro do processo de determinação de renda.
- Alto nível da dívida pública (Carlo Favero & Francesco Giavazzi, 2002), o que é questionado por Marcelo Kfoury Muinhos e Márcio I. Nakane (2006).
- Coalização de interesses formada em torno da manutenção dos juros em níveis elevados (Fabio Stefano Erber, 2008).
- Taxa de impaciência do brasileiro, segundo Octavio de Barros (2011), o que é contestado por Alexandre Schwartzman (2011).
- Alta inflação de serviços, por ser um setor com menor elasticidade da oferta, o que é refutado por William J. Baumol et al. (2012), que mostra que outros países que têm alta inflação no setor de serviços não têm a mesma taxa de juros do Brasil.

Alguns termos são bem técnicos, e é claro que o professor de Matemática não precisa se apropriar de todos eles para abordar o tema.

Entretanto, é importante que o professor entenda que o problema das altas taxas de juros no Brasil existe, ele é complexo, as causas não são simples, não há consenso entre os economistas, essa realidade influencia a vida de toda a população, e tem consequências cruéis na vida das famílias mais pobres, que podem ser as famílias de seus alunos.

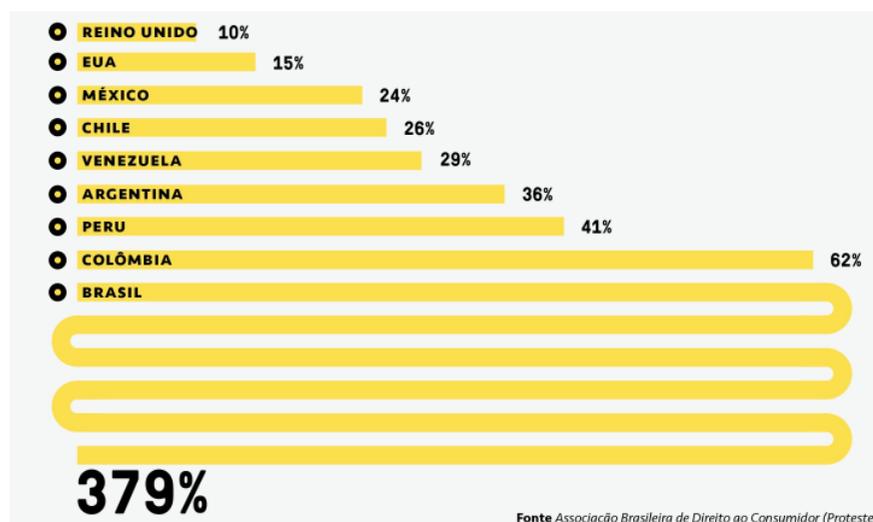
Indo além, o professor pode ter um papel muito importante para ensinar ao seu aluno a tentar se proteger de determinadas armadilhas dos juros, para tentar não aceitar determinadas taxas quando possível. Ele pode ajudar seus alunos a construir a cultura do cuidado com os juros, pesquisando o crédito, identificando distorções e comparando opções. Aprender a lidar com o crédito, reduzindo o seu custo ao máximo possível é uma das importantes tarefas da Educação Financeira.



6 TAXAS DE JUROS NO CENÁRIO BRASILEIRO

Quando o assunto é taxa de juro, em especial aquela que pagamos quando pegamos dinheiro emprestado para a realização de algum sonho de médio ou de longo prazo, ou ainda para empreender em algum negócio, bem como nos ajudar em alguma emergência, o cenário brasileiro ainda é extremamente desafiador. As taxas cobradas, em diversas modalidades de crédito, são exorbitantes quando comparadas aos países da América Latina, da Europa e de outros lugares do mundo. A imagem a seguir apresenta apenas um exemplo dessa situação econômica brasileira, inadmissível e discrepante do resto do Mundo, comparando taxas juros do cartão de crédito cobradas no ano de 2015.

Figura 18: Juros Anuais do Cartão de Crédito Rotativo.



Fonte: Versignassi (2016).



Para refletir

Mas o que as taxas de juros praticadas no Brasil têm a ver com a vida do cidadão comum? Por que eu, um adolescente que ainda não ganha o próprio salário (mas gasta o salário de alguém) preciso aprender sobre taxas de juros, de empréstimos ou investimentos, e de que maneira isso afetará a minha vida?

Para a primeira pergunta, a resposta é: tem tudo a ver com a sua vida. Tudo, mesmo que você ainda não saiba disso.

Para responder à segunda pergunta, convidamos você a investigar e refletir com a gente como essas taxas podem destruir sonhos e oportunidades de uma vida melhor de milhões de pessoas todos os dias, e de como você pode utilizar, com inteligência e sabedoria, algumas oportunidades para realizar seus sonhos e projetos.

Você será convidado a aprender sobre taxas para tentar se proteger de determinadas armadilhas, para tentar não aceitar determinadas práticas, e para construir a cultura do cuidado com os juros, pesquisando o crédito, identificando distorções e comparando opções.

Você quer entender como? Então venha conosco para mais uma viagem no incrível, e muitas vezes assustador, mundo das taxas.



O Banco Central do Brasil disponibiliza em seu portal uma gama de taxas de juro cobradas pelos principais bancos brasileiros, em diferentes modalidades de crédito, bem como para diferentes tipos de pessoas (físicas e jurídicas). A atividade a seguir convida o leitor a refletir sobre esse tema tão importante para uma educação financeira crítica, que ofereça elementos de reflexão e atitude para uma vida melhor.

Objetivos Específicos

Velozes e Furiosos! Uma conversa sobre taxas equivalentes

- Investigar situações financeiras que envolvam o valor do dinheiro no tempo, considerando taxas proporcionais ou equivalentes
- Resolver problemas relacionados às taxas proporcionais ou equivalentes.
- Analisar e tomar decisões em situações econômico-financeiras que envolvam o valor do dinheiro no tempo, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos.

Solução

Velozes e Furiosos! Uma conversa sobre taxas equivalentes

- a) 11 % ao mês é equivalente a 250 % ao ano, porque a taxa mensal incide sobre o acumulado e não valor inicial. A lógica da operação é $I = 1,11^{12} - 1 = 250\%$.
- b) O tempo para dobrar, em meses, é tal que $1,1099^n = 2$. A resposta é $\frac{\log 2}{\log 1,1099}$, o que dá aproximadamente 7 meses.
- c) O tempo para dobrar, em anos, é tal que $1,06^n = 2$. A resposta é $\frac{\log 2}{\log 1,06}$, o que dá aproximadamente 11,9 anos.

Nota 15

Explorando

Taxas de Juros no Cenário Brasileiro

Atividade 24

Velozes e Furiosos! Uma conversa sobre taxas equivalentes

Tabela 17: Taxas de Juros dos principais bancos.

Posição	Instituição	% a.m.	% a.a.
1	Banco BMG S.A.	3,91	58,41
2	Banco Olé Bonsucesso Consignado S.A.	4,33	66,27
3	Banco Daycoval S.A.	4,77	74,90
4	Banco Inter	4,86	76,68
5	Banco Industrial do Brasil S.A.	5,70	94,55
6	Banco Bradesco S.A.	8,35	161,79
7	Banco OB	8,64	170,32
8	Banco C6 S.A.	8,96	179,90
9	Banco do Nordeste do Brasil S.A.	8,96	179,92
10	Banco do Brasil S.A.	9,50	197,92
11	Caruana SCFI	10,23	221,97
12	Caixa Econômica Federal	10,38	227,00
13	Banco BNESTES S.A.	10,77	241,21
14	Banco Itaucard X.A.	10,99	249,61

Dados do Banco Central, acesso em 02/09/2019.

- a) Se um ano tem 12 meses, explique por que uma taxa de aproximadamente 11 % ao mês, cobrada pelo último Banco da lista apresentada na figura, **não** é equivalente a $11\% \times 12 = 132\%$ ao ano, e sim a, aproximadamente, 250 % ao ano?
- b) Quanto tempo leva para uma pessoa ter sua dívida duplicada, se ela ficar devendo o rotativo do cartão de crédito do último Banco da lista apresentada?
- c) E quanto tempo leva para uma pessoa dobrar um capital, se ela investir na poupança? (6 % ao ano aproximadamente)



Duas taxas são equivalentes quando, aplicadas a uma mesma quantia, produzem o mesmo valor futuro em um mesmo período.

Assim, ao aplicar um capital de R\$ 100,00 a uma taxa de 1 % ao mês, quantos por cento ele crescerá em um ano?

Em um ano, $VF = 100 \times 1,01^{12} \approx \text{R\$ } 112,68$. Logo a taxa a anual é de 12,68 %. A taxa de 1 % ao mês é equivalente a 12,68 % ao ano.

De um modo geral, se a taxa de juro em um determinado período de tempo é igual i , então a taxa de juro relativa a n períodos de tempo, chamada de I , é igual a $I = (1 + i)^n - 1$.

Isso acontece pois, se aplicarmos uma mesma quantia C a uma taxa i por n períodos, e a uma taxa equivalente I , relativa a n períodos, teremos:

$$\begin{aligned} C \cdot (1 + I) &= C \cdot (1 + i)^n \\ (1 + I) &= (1 + i)^n \\ I &= (1 + i)^n - 1 \end{aligned}$$

Ou seja, para obter a taxa anual equivalente a 1 % ao mês, bastaria fazer

$$I = (1 + 1\%)^{12} - 1 = 12,68\% \text{ a.a.}$$

Observação

É importante entender duas coisas em relação às taxas de juro. A primeira é que não basta entender a equivalência de taxas, é preciso ter atitude responsável em relação a elas. Conhecimento sem atitude não gera resultados. Se limitar à compreensão do modelo matemático que a representa pode não ser o suficiente para que você entenda e aproveite oportunidades, bem como possa tentar fugir de armadilhas.

Vamos começar pensando nas oportunidades. Por exemplo, aumentar a taxa de retorno de seus investimentos para a aposentadoria de 0,5 % ao mês para 0,7 % aos meses, por exemplo, pode gerar, no longo prazo, uma grande diferença. Em 20 anos, por exemplo, os retornos seriam, respectivamente, de 231 % e 433 %, aproximadamente. Se uma pessoa aplicou R\$ 10.000,00, terá R\$ 33.100,00 na primeira e R\$ 53.000,00 na segunda. Mas se a aplicação for de R\$ 100,00, passamos de R\$ 331,00 para R\$ 533,00. Assim, no longo prazo, essa diferença de 0,2 % poderá produzir uma grande diferença entre as rentabilidades totais, dependendo dos valores investidos.

Isso mesmo! Se a aplicação for de R\$ 100.000,00, passamos de R\$ 331.000,00 para R\$ 533.000,00. Veja que 0,2 % pode gerar uma diferença bem significativa entre os valores acumulados.

A [Tabela 18](#) a seguir mostra uma *simulação* para algumas taxas mensais de retorno, considerando um intervalo discreto de 10 a 30 anos, com variação de 5 anos.



Tabela 18: Análise de sensibilidade das taxas equivalentes às taxas mensais e ao tempo de aplicação. Valores percentuais.

Taxa Mensal (% a.m.)	Tempo de aplicação (em anos)				
	10	15	20	25	30
0,10	12,74	19,71	27,11	34,97	43,31
0,20	27,09	43,28	61,53	82,10	105,30
0,30	43,26	71,46	105,22	145,63	193,99
0,40	61,45	105,15	160,67	231,22	320,86
0,50	81,94	145,51	231,02	346,50	502,26
0,60	105,00	193,52	320,26	501,72	761,54
0,70	130,95	251,00	433,42	710,66	1.132,00
0,80	160,17	319,66	576,90	991,84	1.661,13
0,90	193,05	401,66	758,78	1.370,11	2.416,63
1,00	230,04	499,58	989,26	1.878,85	3.494,96
1,50	496,93	1.358,44	3.463,28	8.605,88	21.170,38
2,00	976,52	3.432,08	11.488,87	37.923,45	124.656,11



Para pesquisar

Que tal fazer uma simulação para outros valores de taxas e outros prazos usando planilhas eletrônicas?

Passemos agora para as armadilhas.

Usar o cheque especial, e pagar os juros altos todo mês é um indício de que seu consumo está incompatível com sua renda, e daí, é hora de tomar algumas atitudes.

Uma delas é reavaliar seu consumo. Será que vale a pena pagar juros de 8% a 12% ao mês (valores de 2022), durante vários meses, para manter determinado consumo?

Ou não seria melhor buscar gastar menos (se possível) e, com o dinheiro que pagaria em juros, tentar usar para benefício próprio. Parar juros para si mesmo, não seria melhor do que para os outros. Juros caros, pagos para outros, geralmente não voltam para você.

Diante de períodos desafiadores, em que gastar mais do que ganha seja praticamente inevitável, tente buscar crédito mais barato (menor custo) que o cheque especial. Vai pegar dinheiro emprestado a 10% ao mês, por comodidade, quando talvez seja possível pegar a 3%, 4% ao mês?

Juros altos geralmente significam adiar alguns sonhos, deixar de ter alguns bens, reduzir a possibilidade de ajudar outras pessoas, afastar oportunidades de novos empreendimentos.

Não prestar atenção às taxas pode adiar o futuro, ou até mesmo, torná-lo impossível.

Outra coisa importante é que, quanto mais informação, mais perdidos podemos ficar. No Brasil, existem diversas taxas de juros em relação ao crédito, que mudam bruscamente dependendo do objetivo do crédito e da instituição financeira que a oferece. Existem ainda muitas modalidades



de crédito. Temos as taxas de juro pagas pelos investimentos, tais como poupança, títulos do tesouro, fundos imobiliários, renda variável, etc.

Uma busca no site do Banco Central nos mostra a variedade de taxas de juros cobradas para os diferentes tipos de crédito no Brasil.

Tabela 19: Modalidades de crédito.

Pessoa Física	Pessoa jurídica
Taxas pré-fixadas	
Aquisição de outros bens	Antecipação de faturas de cartão de crédito
Aquisição de veículos	Capital de giro com prazo até 365 dias
Cartão de crédito parcelado	Capital de giro com prazo superior a 365 dias
Cartão de crédito rotativo não regular	Cheque especial
Cartão de crédito rotativo regular	Conta garantida
Cartão de crédito rotativo	Desconto de cheques
Cheque especial	Desconto de duplicata
Crédito pessoal consignado INSS	Vendor
Crédito pessoal consignado privado	Taxas pós-fixadas referenciada em juros flutuantes
Crédito pessoal consignado público	
Crédito pessoal não consignado	Capital de giro com prazo de até 365 dias
Desconto de cheques	Capital de giro com prazo superior a 365 dias
Financiamento imobiliário com taxas de mercado	Conta garantida
Financiamento imobiliário com taxas reguladas	Taxas pós-fixadas referenciada em moeda estrangeira
Leasing de veículos	Adiantamento sobre contratos de câmbio

Fonte: [Banco Central do Brasil](#).

Então, procure se planejar para avaliar se, e quando, vai tomar crédito, para escolher o tipo de crédito mais adequado para você, pesquisando bem as taxas, e negociando valores sempre que possível.

Observação

Lembre-se que as taxas que nos cobram são geralmente maiores que as taxas que nos pagam.



Objetivos Específicos

Imprevistos e Cheque especial: uma dupla explosiva

- Investigar situações financeiras que envolvam o valor do dinheiro no tempo, considerando taxas proporcionais ou equivalentes
- Resolver problemas relacionados às taxas proporcionais ou equivalentes.
- Analisar e tomar decisões em situações econômico-financeiras que envolvam o valor do dinheiro no tempo, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos.

Nota 16

Objetivos Específicos

Reduzindo taxas e ampliando oportunidades

- Investigar situações financeiras que envolvam o valor do dinheiro no tempo, considerando taxas proporcionais ou equivalentes
- Resolver problemas relacionados às taxas proporcionais ou equivalentes.
- Analisar e tomar decisões em situações econômico-financeiras que envolvam o valor do dinheiro no tempo, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos.

Solução

Reduzindo taxas e ampliando oportunidades

Primeiro temos que transformar a taxa 2,99 % a.a. para uma taxa anual, daí temos $(1 + 0,0299)^{12} = 1 + i_a$, resolvendo esta equação, temos $i_m = 0,4241 = 42,41$ %. Agora temos que transformar 2,29 % a.a.. Para uma taxa anual, daí temos $(1 + 0,0299)^{12} = 1 + i_a$. A redução, em pontos percentuais será $42,41\% - 31,22\% = 11,19\%$.

Nota 17

Imprevistos e Cheque especial: uma dupla explosiva

Cláudia, cliente do Banco do Brasil, teve uma emergência e precisa de R\$ 5.000,00 para daqui a dois dias. Ela pode usar o cheque especial para fazer um empréstimo nesse valor ou buscar uma alternativa mais barata. Pensando um pouco, ela lembra que tem R\$ 5.000,00 na poupança, guardados por ela mesma para alguma emergência. Considere que esse dinheiro na poupança renda 0,6 % ao mês.

Tabela 20: Taxas de Juros.

Posição	Instituição	% a.m.	% a.a.
1	Banco Ribeirão PRETO S.A.	0,91	11,50
2	Banco Crefisa S.A.	1,45	18,89
3	Banco Alfa S.A.	1,80	23,89
4	Banco Sofisa S.A.	2,24	30,45
13	Banco Inter	6,00	101,20
14	Banco do Estado do Paraná S.A.	6,01	101,48
15	Banco Daycoval S.A.	6,77	119,44
16	Banco C6 S.A.	7,48	137,71
17	Banco do Brasil S.A.	7,54	138,27

- Qual a estratégia mais eficiente, dentre as apresentadas, do ponto de vista exclusivamente financeiro? Justifique sua resposta.
- Quanto reais ela economizaria em juros, considerando um empréstimo de R\$ 5.000,00 durante 6 meses, na comparação entre as alternativas apresentadas?

Atividade 26

Reduzindo taxas e ampliando oportunidades

O Banco Central do Brasil reduziu, em setembro de 2019, a taxa base da Economia (taxa Selic) de 6,0 % ao ano, para 5,5 % ao ano. A [Figura 19](#) mostra como alguns Bancos públicos e privados modificaram algumas de suas taxas devido a essa redução da Selic.

Considere, conforme mostrado na [Figura 19](#), que a Caixa Econômica Federal passasse os juros médios do crédito pessoal de 2,99 % a.a. para 2,29 % a.a.. Qual seria a redução, em pontos percentuais, da taxa de juro anual cobrada pela Caixa Econômica Federal?



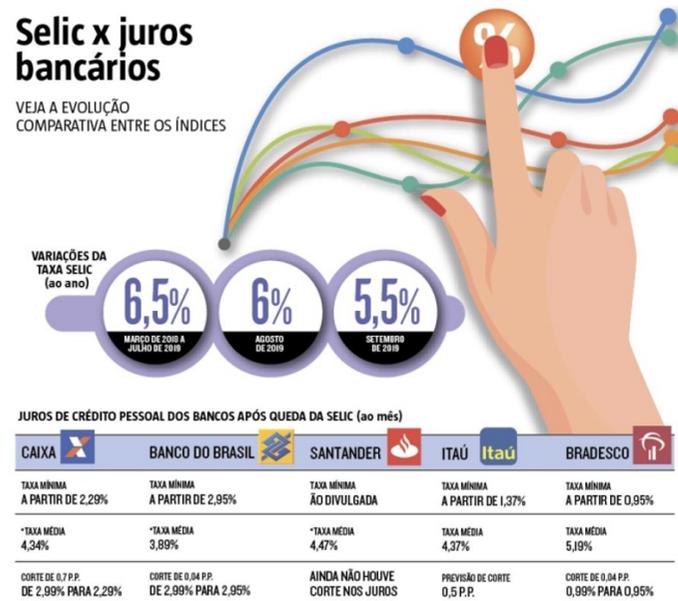


Figura 19: Comparação da taxa Selic com os juros dos bancos

Objetivos Específicos

Velozes e Furiosos 2 — As taxas atacam novamente

- Investigar situações financeiras que envolvam o valor do dinheiro no tempo, considerando taxas proporcionais ou equivalentes
- Resolver problemas relacionados às taxas proporcionais ou equivalentes.
- Analisar e tomar decisões em situações econômico-financeiras que envolvam o valor do dinheiro no tempo, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos.

Sugestões e discussões

Velozes e Furiosos 2 — As taxas atacam novamente

Nesta atividade, convidamos o aluno a investigar o custo do crédito em diferentes opções, comparando o cheque especial com o rotativo do cartão de crédito e o consignado. Recomendamos que o professor peça aos alunos para pesquisarem os custos dessas diferentes modalidades, incluindo as que atualmente são usadas pela família, se for o caso. O site do Banco Central tem uma parte exclusiva sobre taxas de juro, quinzenalmente atualizada, e disponível em <https://www.bcb.gov.br/estatisticas/txjuros>.

Nota 18

Atividade 27

Velozes e Furiosos 2 — As taxas atacam novamente

Leia atentamente os dados a seguir:

Modalidade de crédito	Set/2017	Out/2017	Nov/2017
Crédito Consignado (% a.m.)	3,5	3,4	3,2
Crédito do Cheque Especial (% a.m.)	13,0	12,8	12,5
Crédito do Cartão de Crédito Rotativo (% a.m.)	15,0	14,6	14,0

Dados do Banco Central do Brasil.

- Explique como são cada uma dessas três modalidades de crédito
- Por que a primeira é muito mais barata que as outras duas?
- Analisando as imagens a seguir, você acha que o endividamento é bom para as pessoas? E para os Bancos? E para a geração de empregos e crescimento do Brasil? Justifique e fundamente sua resposta.



Sugestões e discussões

Selic, uma montanha-russa perigosa

A Taxa Selic tem é taxa básica de juros da Economia. Essa taxa é usada como referência para a cobrança de Juros no país. Lembre-se que, sendo a Selic taxa que o governo paga a quem empresa dinheiro para ele, ela impacta diretamente no custo do crédito, pois os Bancos sempre emprestam dinheiro a uma taxa maior que a taxa Selic. Com isso, o crédito fica mais caro. Financiamentos de médio e longo prazos ficam mais caros. O custo de captação das empresas para investimento e capita de giro — comprar mercadorias e às vezes cobrir custos operacionais, fica mais caro. E isso é repassado ao consumidor. Além disso, comprar em várias parcelas, tende a ficar mais caro. E prestação mais alta pode significar não comprar, afetando assim o consumo das famílias.

Solução

Selic, uma montanha-russa perigosa

- Resposta pessoal
- Os preços, em dois anos, seriam respectivamente de: $100 \times 1,022 = 104,04$ e $100 \times 1,1375^2 = R\$ 129,39$.
- A taxa Selic é a taxa que o governo paga a quem empresa dinheiro para ele. Ela impacta no custo do crédito, pois os Bancos emprestam dinheiro a uma taxa sempre maior que a taxa Selic. Com isso, o crédito fica mais caro. Comprar em várias parcelas, tende a ficar mais caro. E prestação mais alta pode significar não comprar, afetando assim o consumo das famílias.

Objetivos Específicos

Crédito pessoal é sinônimo de dívida?

- Investigar situações financeiras que envolvam o valor do dinheiro no tempo, considerando taxas proporcionais ou equivalentes
- Resolver problemas relacionados às taxas proporcionais ou equivalentes.
- Analisar e tomar decisões em situações econômico-financeiras que envolvam o valor

Selic, uma montanha-russa perigosa

Endividamento das famílias, alto desemprego, queda no poder de compra, mudança do perfil do consumidor brasileiro depois da pandemia, atitudes políticas do Banco Central — isso tudo se somou à maior taxa de juros real do mundo para tornar o Brasil o cenário perfeito para crises no setor varejista. Em janeiro de 2021, a taxa básica de juro era 2%. Essa taxa foi sendo aumentada bruscamente, de modo que, em janeiro de 2023, a taxa já estava em 13,75%.

Figura 20: Brasil tem o maior juro básico desde 2016



Fonte: Machado e Buono (2023). Dados do Banco Central

Baseado na sua leitura, responda aos itens a seguir.

- Qual a mensagem principal que essa ilustração passa para você sobre a relação entre a taxa básica de juros da Economia e o seu impacto no poder de compra das famílias?
- Considere que um produto custava R\$ 100,00 em janeiro de 2021. Se o preço desse produto aumentasse, todo ano, segundo a selic de janeiro de 2021, quanto ele custaria em janeiro de 2023? E se aumentasse, no mesmo período, segundo a selic de janeiro de 2023?
- Se a taxa Selic não é uma taxa de inflação, como ela pode, efetivamente, influenciar o consumo das pessoas? Use a ilustração para descrever, de forma fundamentada, essa relação entre Selic e o consumo das famílias, levando também em conta o aparente comportamento de consumo, dos três bonecos, em seus respectivos momentos econômicos.

Crédito pessoal é sinônimo de dívida?

Leia atentamente um fragmento da matéria veiculada no Blog Tecnisa, em abril de 2022, sobre a redução da taxa básica de juros da economia ocorrida na época.

Nas últimas semanas surgiram ótimas notícias sobre a redução dos juros, promovidos pelo Banco do Brasil e Caixa Econômica Federal que na sequência também foi adotado — em partes — por outros bancos. Mas a redução dos juros não significa que eles ficaram realmente baratos ou que é seja uma sinalização para o consumo sem planejamento.

Se de um lado existe um devedor, de outro lado existe um credor. Muitos tomam emprestados e poucos emprestam — cobrando caro por isso. As pessoas se endivi-



dam para adquirir bens ou serviços de que, em uma parte das vezes, não precisam ou não querem (fazem para impressionar) e se deixam vencer pelo apelo da mídia ou pela simples “manutenção do status.”

Falando nisso, uma das definições de status mais brilhante que ouvi nos últimos tempos surgiu no último final de semana, a partir das palavras de um educador financeiro: “Status é o sentimento que move alguém a comprar coisas que não precisa, com o dinheiro que não tem, para agradar alguém que não gosta.” Trata-se da mais pura verdade!

Nos últimos anos fomos envolvidos por grandes campanhas que ofereciam crédito quase que como frutas ou legumes que encontramos nas feiras livres. Bastava escolher a “melhor banca” e o “melhor produto,” mas com um diferencial: pagamentos a perder de vista. A estratégia arriscada não é nova e a prática comprovou que se trata de um tiro no pé do consumidor — ele se satisfaz momentaneamente e cria (muitos) problemas para o futuro.

O velho conto do crédito fácil caiu como uma luva para situação do brasileiro comum, aquele que nunca buscou a educação financeira e o investimento como formas de realização de seus sonhos e objetivos. Provavelmente, isso aconteceu devido à falta de sonhos e objetivos. Aliás, quais são os seus sonhos? Já parou para pensar nisso?

Ao usar o dinheiro fácil oferecido por tantas instituições, o cidadão perceberá, talvez tarde demais, que o pior é o preço desta facilidade. O crédito fácil é caríssimo (mesmo com a redução atual) — sempre foi e sempre será. Devido ao meu envolvimento com o tema, ouço relatos impressionantes de pessoas que hoje não enxergam uma luz ou um caminho para sair desse buraco financeiro.

Sim, a situação pode ficar crítica. São pessoas que vivem a base de remédio, que dizem não ter mais motivo para viver ou que não conseguem nem mesmo comprar alimento para os filhos. A verdade parece distante. Não conte com isso. A realidade está logo ali, na família vizinha, ou mesmo mais perto do que imaginamos — é o nosso amigo, irmão ou nossos pais (Tecnisa, 2012).

Posição	Instituição	Taxas de juros	
		% a.m.	% a.a.
1	Banco BMG S.A.	3,91	58,41
2	Banco Olé Bonsucesso Consignado S.A.	4,33	66,27
3	Banco Daycoval S.A.	4,77	74,90
4	Banco Inter	4,86	76,68
5	Banco Industrial do Brasil S.A.	5,70	94,55
6	Banco Bradesco S.A.	8,35	161,79
7	Banco OB	8,64	170,32
8	Banco C6 S.A.	8,96	179,90
9	Banco do Nordeste do Brasil S.A.	8,96	179,92
10	Banco do Brasil S.A.	9,50	197,92
11	Caruana SCFI	10,23	221,97
12	Caixa Econômica Federal	10,38	227,00
13	Banco BNESTES S.A.	10,77	241,21
14	Banco Itaucard S.A.	10,99	249,61

- Qual a sua opinião sobre o texto?
- O que é o crédito fácil?
- Quais são as conexões entre esse texto e a tabela acima, sobre as taxas do rotativo do cartão de crédito?

do dinheiro no tempo, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos, em especial às envolvendo o custo do crédito e sua facilidade de acesso.

Solução

Crédito pessoal é sinônimo de dívida?

- Resposta individual.
- Crédito fácil são os produtos de empréstimos oferecidos pelo banco ou instituições financeiras para os consumidores, muitas vezes sem muita burocracia e complexidade em termos do cliente ter que comprovar que possui algum tipo de renda para honrar o compromisso do pagamento do empréstimo até a sua quitação.
- Resposta pessoal.

Nota 19



PARA O PROFESSOR: INFLAÇÃO E PODER DE COMPRA

Objetivo geral

Investigar situações financeiras que envolvem a noção de inflação, explorando alguns índices no contexto brasileiro, entendendo alguns fatores que influenciam a variação de preços e possíveis impactos na vida da população, como a redução do poder de compra.

Conceitos abordados: taxas e fatores; médias; progressão geométrica; inflação (IPCA, Índice de Preços ao Consumidor (IPC), Índice Geral de Preços do Mercado (IGP-M)); Efeito Fisher.

Habilidades da BNCC

EM13MAT101 Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

EM13MAT104 Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.

EM13MAT203 Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

Recomendações para o professor

Organização em sala de aula Em sala, sugerimos três abordagens que podem ser combinadas ou separadas. A primeira é a pesquisa de preços, em campo ou na internet. Isso pode envolver noções de estatística, inclusive. A segunda é a pesquisa dos tipos de índices. Sugerimos o portal IBGE Educa nesse processo. A terceira é expositiva, reunindo os principais índices, conforme apresentado no próprio LA de EF. A pesquisa de preços de bens e serviços deve acompanhar a ideia de série temporal, ou seja, como os preços evoluem no tempo e quais fatores impactam, predominantemente, tais variações.

Dificuldades previstas Na abordagem dos índices de inflação, temos dois tipos de dificuldades centrais: a operacional e a conceitual. Na parte operacional, lidar com produtos de fatores envolvendo percentuais com várias casas decimais, além de médias geométricas e raízes n -ésimas desses números, demandam cálculos que seriam extremamente trabalhosos, sem o auxílio de tecnologia digital (calculadoras, simuladores e smartphones). Na parte conceitual, a variedade de índices de inflação também pode ser pontos de dificuldades e gerar alguns obstáculos iniciais na compreensão das atividades.

Sugestões gerais O professor não deve abrir mão de buscar auxílio da tecnologia. Calculadoras e simuladores são fundamentais nessa abordagem. Além disso acessar os materiais do site do Banco Central e do IBGE são ótimas oportunidade para fazer uma imersão no tema. A ideia de inflação pode ser abordada no Ensino Fundamental II, na habilidade EF09MA05 sobre porcentagens e aumentos sucessivos, bem como no Ensino Médio, na habilidade **EM13MAT104**, analisar e calcular índices sócio-econômicos, relacionável com ideias em progressões, funções e Estatística.

Enriquecimento da discussão Entender inflação para poder se proteger dos seus efeitos em contextos brasileiros é uma habilidade financeira importante.



7 INFLAÇÃO E PODER DE COMPRA

Outra situação envolvendo a transformação do dinheiro no tempo se refere à relação entre **inflação** e **poder aquisitivo (ou poder de compra)**. O aumento de preços de produtos e serviços interfere diretamente no poder de compra das famílias e na realização de projetos e sonhos das pessoas.

A inflação afeta a vida das pessoas de uma maneira mais forte e sutil do que a maioria imagina ou pensa. Convidamos você a investigar e refletir com a gente esse aspecto econômico tão importante na vida das pessoas, que é a inflação.

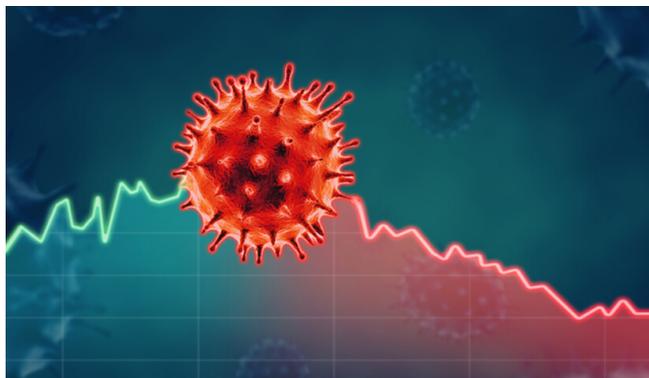
Veja as seguintes chamadas de matérias veiculadas nos últimos anos.

Custo da cesta básica aumenta nas 17 capitais pesquisadas pelo Dieese

O custo da cesta básica de alimentos aumentou em abril em todas as 17 capitais onde o Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos (Dieese) realiza a Pesquisa Nacional da Cesta Básica de Alimentos. De março para abril, as altas mais expressivas ocorreram em Campo Grande (6,42%), Porto Alegre (6,34%), Florianópolis (5,71%), São Paulo (5,62%), Curitiba (5,37%), Brasília (5,24%) e Aracaju (5,04%). A menor variação foi observada em João Pessoa (1,03%) (Flávia Albuquerque, 2022).

Pandemia pode gerar inflação no longo prazo

Segundo matéria do Financial Times, há algumas razões na crise atual que podem gerar inflação no longo prazo, entre eles o aumento da dívida pública (Redação do Panorama Crypto, 2020).



De arroz a gasolina: por que a inflação virou o problema que faltava ao Brasil em 2021

O risco inflacionário neste momento não chega perto do que um dia foi no Brasil. Mas em todo o mundo, o choque da COVID-19 deve seguir mexendo com os preços em 2021 (Carolina Riveira, 2021).

Alta no preço das carnes faz hábito alimentar dos brasileiros mudar

[...]

O mesmo acontece com a demanda por ovos. Segundo o levantamento, o consumo do produto, de janeiro a agosto deste ano, foi quase 20% superior às proteínas provenientes do boi, sejam de peças nobres ou de segunda.

Proteínas mais consumidas pelos brasileiros em 2021:

- Ovo -- 19,1% da população

Objetivos Específicos

Inflação e poder de compra

- Investigar situações financeiras que envolvem a noção de inflação, alguns tipos de índices que buscam medir inflação, os fatores que a influenciam e possíveis impactos na vida da população

- Resolver problemas relacionados às noções de inflação e poder de compra

- Analisar e tomar decisões em situações econômico-financeiras que envolvam a noção de inflação, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos.

Sugestões e discussões

Inflação e Poder de Compra

Nessas quatro atividades disparadoras, convidamos o aluno a pensar sobre situações onde a noção de inflação, poder de compra e ganho real estão presentes. Os aspectos matemáticos aqui são importantíssimos, pois mais uma vez nosso cérebro tende a nos enganar. Um exemplo disso é nos querer empurrar na direção de acreditar que um aumento de 20% na renda, em uma inflação de 5%, representa um aumento no poder de compra de 15%. Ou seja, temos aqui uma tendência a mobilizar nosso sistema 1, substituindo um problema que não sabemos resolver por outro que sabemos resolver, ou que achamos ser o mesmo problema. Isso gera uma percepção de que o processo aditivo é o adequado para responder a essa situação, quando na verdade não é. E o professor de Matemática, sabendo disso, pode apresentar diferentes situações para mostrar aos alunos por que o processo aditivo não é o mais adequado.

No Organizando: *Índices de Inflação e Seus Impactos* procuramos explicar detalhadamente cada situação, aproveitando para construir e organizar os conceitos nelas envolvidos.

As *Atividades 30 a 32* tratam da relação conhecida como Efeito Fisher entre taxa nominal, taxa real e inflação, que será demonstrada no próximo organizando as ideias, que pode ser escrita assim:

$$1 + i_r = \frac{1 + i_n}{1 + i_f}$$



onde i_r , i_n e i_f são a taxa real, a taxa nominal e a inflação, respectivamente.

Na terceira atividade convidamos o aluno a entender o principal mecanismo de reajuste dos aluguéis no Brasil: reajuste pelo índice chamado IGP-M, que é diferente do principal índice de inflação, que é o IPCA. Esses dois índices são explorados na próxima seção.

As soluções das atividades [Atividades 31 a 33](#) serão apresentadas no Organizando: [Índices de Inflação e Seus Impactos](#).

- Frango --- 14,6 % da população
- Carnes bovinas de segunda -- 14,1 % da população
- Carnes nobres -- 7 % da população

(Iuri Corsini & Lucas Janone, 2021).

* Valores em reais

produto	2020	2021	2022
Arroz - 5kg	14,73	21,85	20,22
Feijão carioca - kg	7,30	6,67	8,30
Café em pó - ½ kg	7,44	7,72	15,10
Leite UHT - litro	3,27	3,67	4,95
Batata - kg	6,36	4,64	7,89
Pão francês - kg	12,49	12,91	15,48
Açúcar - 5kg	11,92	15,02	21,35
Óleo de soja	3,95	7,55	10,21
Farinha de trigo - kg	3,39	3,78	4,99
Margarina	2,19	2,66	3,47
Carne de primeira - kg	32,60	43,51	46,52
Ovos brancos - dúzia	7,66	8,07	10,01
Frango - kg	7,15	9,10	11,67
Sabão em pó	7,45	6,94	9,73
Papel higiênico	5,05	4,67	5,46
Creme dental	2,77	2,98	3,61
Limpador multiuso	3,10	3,22	3,81
	138,82	164,96	202,77



Carrinho esvaziado: G1 mostra a queda do poder de compra de R\$ 200,00 em dois anos no Brasil

Quem faz as contas já reparou: os preços nos supermercados estão cada vez mais altos. Em maio, a prévia da inflação oficial do Brasil, medida pelo IPCA-15, acumulou alta de 11,73 % em 12 meses.

Se você acha que consegue colocar cada vez menos compras no carrinho do mercado, não é só uma impressão: o valor do dinheiro está “encolhendo” mesmo. Especialmente na hora de comprar alimentos e bebidas.

Segundo o Procon, nos últimos 12 meses, os três produtos que mais subiram foram o café em pó — com uma alta de 95,6 % —, a batata (70 %) e o pacote de biscoito água e sal (48,8 %).

Em dois anos, o carrinho — com os mesmos itens (veja abaixo) — ficou R\$ 63,95 mais caro. Considerando apenas de janeiro a maio deste ano, ficou 21,26 % mais caro.

Para demonstrar como a alta da inflação afeta diretamente o poder de compra dos brasileiros, o G1 fez uma comparação entre a quantidade máxima de itens que era possível colocar no carrinho do supermercado com R\$ 200,00 em maio de 2020, 2021 e 2022, considerando os valores médios de produtos básicos [...] (Thaís Matos & Paula Paiva Paulo, 2022).

Crise econômica e política levam o real ao menor poder de compra desde 1994 [...]

Real perde 85,41 % do seu poder de compra na comparação com o primeiro ano da moeda em 1994. (Rafael Chinaglia, 2021).



Mas o que é inflação? Como é medida? Quais seus impactos no poder de compra das famílias? Vamos tentar responder a essas perguntas, a partir de quatro atividades.

Explorando

Inflação e poder de compra

Atividade 30

Cadê o meu dinheiro?

Observe atentamente a imagem a seguir



- O que aconteceu com a nota de R\$ 5,00: continua sendo de 5,00 reais ou não?
- O que significa o valor de R\$ 16,65 sobre a nota de R\$ 100,00 na segunda coluna?
- Por que o valor das notas na segunda coluna mudou?
- Você vê algum problema em algum dos valores apresentados na segunda coluna?
- Qual a relação entre a imagem da figura anterior com a nota de R\$ 200,00, lançada em setembro de 2020.

Figura 21: Verso da Nota de R\$ 200,00



Atividade 31

Sua inflação é igual à minha inflação?

Considere uma família cuja renda mensal, em janeiro de 2019, fosse de R\$ 5.000,00. Vamos supor que a inflação para essa família tenha sido de 10% durante esse ano. Isso significa que, em média, os produtos que a família consumia aumentaram 10% em um ano. Por outro lado,

Solução

Cadê meu dinheiro

- A nota continua sendo de 5,00 reais, e com ela, compramos produtos cujo preço é de 5,00 reais, independente do ano. Mas isso não significa que conseguimos comprar o mesmo produto que custava R\$ 5,00 em 1994.
- Significa que R\$ 100,00 em 1994 valem apenas R\$ 16,65 em 2019, considerando um determinado tipo de inflação no período. Ou seja, com 100,00 reais hoje eu consigo comprar hoje apenas o que conseguiria comprar com R\$ 16,65 em 1994. Ou ainda que um produto que custava R\$ 16,65 em 1994 custa hoje R\$ 100,00.
- Por causa da redução do poder de compra da moeda, devido a diversos fatores, dentre eles a inflação.
- A terceira linha apresenta uma inconsistência, derivada de um erro de conta ou digitação, provavelmente, e não de aproximação.
- A nota de R\$ 200,00 aumenta o dinheiro em circulação no país, reduzindo o custo de emissão de notas. Além disso, com a perda do poder de compra da moeda, notas de maior valor atendem a realidade de preços e demandas que antes não atenderiam tanto.



vamos admitir que a renda da família, em janeiro de 2020, seja 15 % maior, e que a inflação oficial anunciada tenha sido de 5 % ao ano.

Qual foi o aumento do poder de compra dessa família nesse período, considerando a inflação oficial? E considerando a inflação que de fato aconteceu para essa família?

Atividade 32

Inflação e investimento

Maria ganhou um aumento de 10 % em um ano, mas sua inflação foi de 6 % ao ano. Benedita ganhou um aumento de 5 % mas sua inflação foi de 1 % ao ano. Qual das duas teve o maior ganho real? Justifique sua resposta.

Atividade 33

Por que o meu aluguel aumentou desse jeito?

Josimar alugou um apartamento, em fevereiro de 2019, por R\$ 2.400,00, ficando acordado no contrato que a cada 12 meses o valor seria reajustado pelo IGP-M acumulado nos últimos 12 meses. A tabela abaixo mostra o índice acumulado nos primeiros seis meses de 2020.

Mês	Mensal (%)	Acumulado nos últimos 12 meses (%)	Acumulado no ano (%)
Janeiro	0,48	7,8223	0,4800
Fevereiro	0,04	6,8389	0,4398
Março	1,24	6,8178	1,6843
Abril	0,80	6,6908	2,4987
Mai	0,28	6,5103	2,7857
Junho	1,56	7,3133	4,3892

Em março de 2020, ele percebeu que o aluguel passou de R\$ 2.400,00 para R\$ 2.564,00. O valor do aluguel foi reajustado corretamente? Justifique sua resposta

Vamos refletir sobre essas situações econômico-financeiras, investigando cada atividade no próximo tópico do Organizando: *Índices de Inflação e Seus Impactos*.



Essas atividades ilustram, um pouco, como a inflação pode interferir profundamente na vida das pessoas. *Mas o que é inflação?*

Atualmente, a definição mais comum entre os especialistas para o termo *inflação de preços*, é o aumento continuado e generalizado dos preços dos bens e serviços (European Central Bank, 2018). Assim, a inflação tem como principal impacto o aumento/redução do poder de compra para o consumidor e para as empresas.

Ela consiste tecnicamente em um processo de aumento contínuo e generalizado dos preços de uma certa categoria de bens e serviços ofertados em uma região. A noção de contínuo da inflação se refere a um intervalo de tempo sem interrupções. A ideia de generalizado significa que a inflação não se refere ao preço de um único produto ou serviço, mas é calculada considerando alguns produtos e serviços (cesta de produtos) para os quais se olha a evolução dos preços.

Ou seja, se a inflação em determinado mês for de 0,5 %, isso significa que o aumento médio dos preços da cesta de produtos e serviços considerados foi de 0,5 % naquele mês. Isso não significa que todos os produtos aumentaram 0,5 %, ou seja, a variação não é uniforme. Um exemplo disso foi o aumento de 45 % no preço do tomate, o que fez a inflação oficial (IPCA) aumentar em, aproximadamente, 0,2 pontos percentuais.

Antes de tratarmos de como as taxas de inflação – variação percentual do nível geral de preços têm sido medidas no Brasil, é importante entender alguns fatores que podem influenciar a inflação em uma região.

No [Quadro 1](#) apresentamos alguns dos muitos fatores que influenciam a inflação, em especial, em contextos brasileiros.

Quadro 1: Fatores de influência na taxa de inflação

Fator	Exemplos reais
Custos de produção	Se os custos dos insumos para se produzir os produtos aumentam, eles tendem a ser repassados para o preço. Assim, se o preço da matéria prima, da energia elétrica ou do frete aumenta, os custos geralmente são repassados ao consumidor. Um exemplo é o caso do pão francês quando o preço do trigo ou do fertilizante aumenta. Ou no caso da carne bovina, quando o preço da ração aumenta ou quando falta gado para abate (aumentando o preço do bezerro e com isso o custo).
Descompasso entre oferta e demanda	A procura maior por um produto que não é acompanhada da oferta tende a aumentar os preços. Uma grande oferta de produtos que não estão vendendo, tende a produzir redução de preços. O Alcool em gel e as máscaras foram exemplos na pandemia.
Aumento de moeda no mercado	Governo imprime moeda, colocando mais dinheiro em circulação. Com isso, pessoas e empresas tem a sua disposição mais dinheiro, gerando dependendo do volume uma alta de alguns produtos e serviços.

Continua na próxima página

Fator	Exemplos reais
Aumento da oferta de crédito	Quanto mais barato for o custo do dinheiro, o acesso tende geralmente a produzir aumento de preços.
Cartéis	Algumas empresas combinam de aumentar os preços para ganharem mais dinheiro sobre um determinado grupo de consumidores. Um exemplo comum ocorre com postos de combustíveis.
Custo do crédito	Se as taxas de juros sobrem, o custo do crédito tende a subir e a capacidade de comprar, para um parte da população se reduz, gerando uma queda nos preços, ainda que possa demorar um pouco para efetivamente acontecer.
Variação Cambial	Quando os produtos são importados, ou seja, vem de fora do país, com alta do dólar os preços desses produtos também aumentam, pois são vendidos e comprados em dólar, influenciando a inflação.
Exportações	Quando a moeda local está em queda, os produtores ganham mais dinheiro exportando seus produtos, pois o Dólar e o Euro estão mais caros. Com isso, vendem mais para fora e menos para o Brasil, reduzindo a oferta e, conseqüentemente, ocasionando uma alta dos preços para os brasileiros. Um exemplo foi o preço da carne bovina, em 2022.

Após entendermos a noção de inflação e alguns fatores que a influenciam, precisamos entender como medir a inflação. Existem várias medidas da inflação no Brasil. Vamos focar em três delas: O IPCA, o INPC e o IGP-M. O que cada um desses índices significa? Quais são as diferenças entre eles? O que eles medem?

O [Quadro 2](#), a seguir, apresenta uma comparação entre esses três índices.

Quadro 2: Índices de inflação comumente utilizados no Brasil.

Índice	O que significa?	Órgão responsável	O que mede e como?
IPCA	Índice de Preços ao Consumidor Amplo	IBGE	O IPCA é o índice oficial de inflação no Brasil. Ele engloba uma parcela maior da população. Ele aponta a variação do custo de vida médio de famílias com renda mensal de 1 a 40 salários mínimos.
INPC	Índice Nacional de Preços ao Consumidor	IBGE	O INPC verifica a variação do custo de vida médio apenas de famílias com renda mensal de 1 a 5 salários mínimos. Esses grupos são mais sensíveis às variações de preços, pois tendem a gastar todo o seu rendimento em itens básicos, como alimentação, medicamentos, transporte, etc.

Continua na próxima página



Índice	O que significa?	Órgão responsável	O que mede e como?
IGP-M	Índice Geral de Preços do Mercado	Fundação Getúlio Vargas (FGV)	O IGP-M, foi criado nos de 1940 para medir o movimento dos preços de forma geral. Por isso ele é mais abrangente que os outros índices do mercado. Ele atualmente é usado no cálculo dos reajustes do setor imobiliário, em especial, dos aluguéis. Então quem mora de aluguel precisa ficar de olho neste índice. Ele é calculado a partir de 3 outros índices: 60 % vem do Índice de Preços por Atacado (IPA-M); 30 % vem do Índice de Preços ao Consumidor (IPC-M), e 10 % vem do Índice Nacional de Custo de Construção (INCC).

É possível verificar a variação do IPCA em um certo período, por meio de um simulador chamado *Calculadora do IPCA*, disponível no site do IBGE. Vamos considerar uma que uma cesta de produtos custava 100 reais no início do ano de 2014. Quanto custaria a mesma cesta, se ela aumentasse segundo o IPCA, em abril de 2022? A simulação mostra que custaria R\$ 165,54. Uma variação de, aproximadamente, 66 % em 8 anos.

Figura 22: Calculadora do IPCA.

Calculadora do IPCA

Atualize uma quantia utilizando o índice oficial de inflação brasileiro

A Calculadora do IPCA permite atualizar um valor pela variação do Índice de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA) entre duas datas. Através desse cálculo, é possível simular a correção de uma quantia numa determinada data utilizando o índice de preço e saber o valor correspondente numa outra data. [Ver descrição completa.](#)

Mês inicial: 01/2014 Mês final: 03/2022 Valor na data inicial (R\$): 100,00 >>

O valor na data final é de

R\$ 165,54

O percentual total no intervalo é de **65,54%**

Esta calculadora usa o período entre o dia 1 do mês inicial e o último dia do mês final.

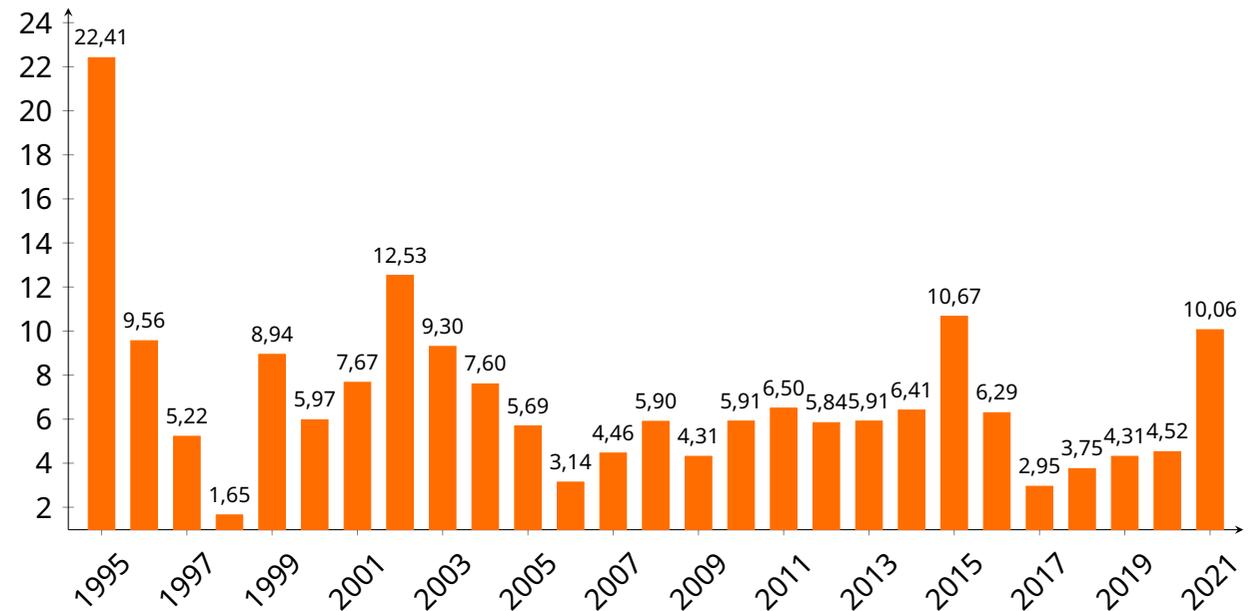
Metodologia de cálculo

Disponível em IBGE (2022a).

Mas como tem sido a inflação do Brasil nos últimos anos? A [Figura 23](#) apresenta a inflação anual no Brasil no período de 1995 a 2021.



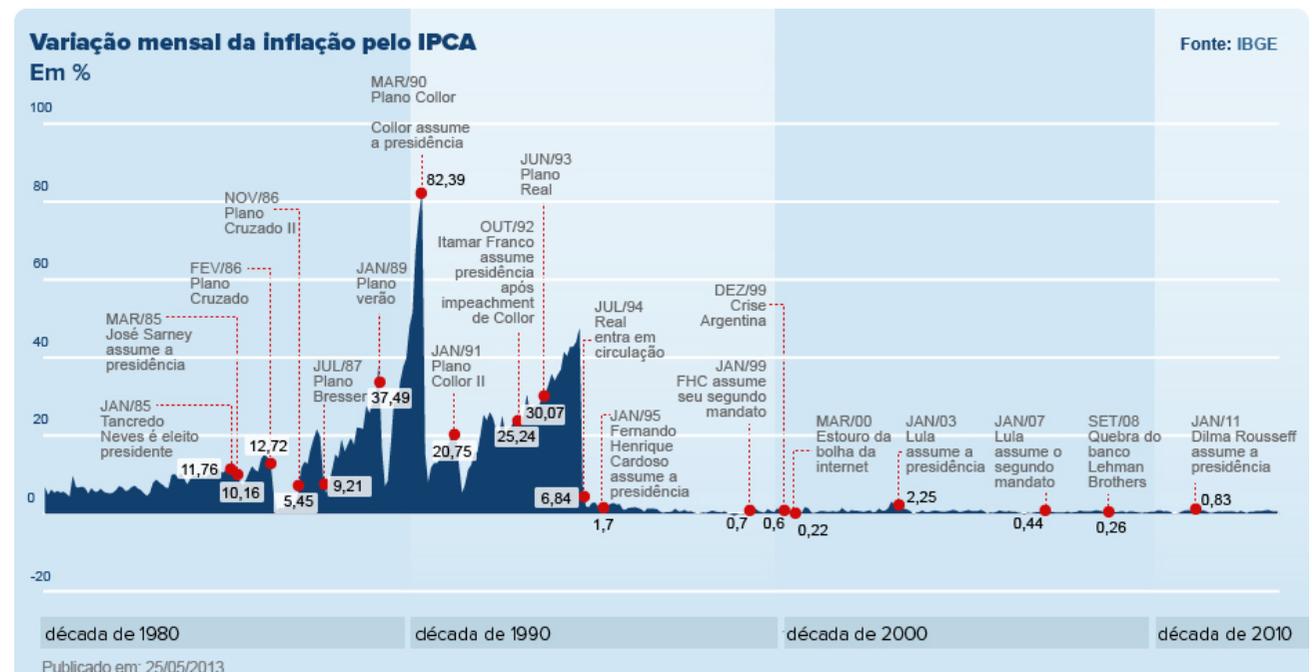
Figura 23: Inflação no Brasil (IPCA em %) de 1995 a 2021.



Elaborado a partir de dados do IBGE (2022b).

Esse período de inflação parcialmente controlada foi uma importante conquista do povo brasileiro, ainda que apresente índices de inflação ainda considerados elevados e destruidores de poder de compra. O gráfico a seguir mostra um período mais amplo, que nos ajuda a comparar esses últimos 25 anos com períodos de hiperinflação, em especial os que experimentamos nas décadas de 80 e no início da década de 90, antes do plano real.

Figura 24: Histórico da inflação brasileira. Brasileiros chegaram conviver com inflação de mais de 80% ao mês.



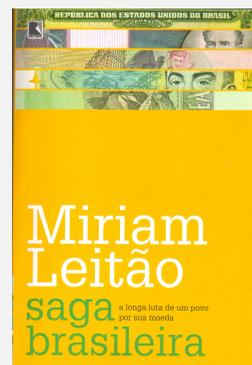
Fonte: Alvarenga et al. (2013).





Você Sabia?

Como mostra Leitão (2011), na década de 80 do século passado, a população do país sofre com a hiperinflação, em que os preços dos alimentos e o valor do dinheiro mudavam de um dia para o outro. Muitas pessoas estocavam alimentos em casa, com o receio de que no dia seguinte já não teriam mais condições de comprar, ou por simplesmente comprar bem mais caro. Nos últimos anos (de 2017 a 2022, pelo menos) a sociedade brasileira passa por um aumento da inflação, conforme se pode ver no gráfico sobre a evolução do IPCA de 1995 a 2021. Se existe um país em que entender de inflação, suas variações e seus impactos na vida do povo, seja muito importante, esse país é o Brasil.



Entendidos esses conceitos básicos, vamos passar para a análise das atividades, tentando entender de que maneira a inflação impacta no poder de compra das famílias.

Na primeira atividade, a renda da família aumentou 15% e a inflação para a família foi de 10%, no mesmo período. Uma ideia natural de operar essas duas taxas é subtraí-las, gerando um percentual que, em princípio, expressaria o quanto poderíamos comprar a mais. Mas será que o poder de compra dessa família aumentou em 5% nesse período?

Para fixar as ideias, considere um produto que vai acompanhar a inflação e que cada quilograma custava 50,00 reais em janeiro do ano anterior. Por exemplo, vamos considerar a capacidade de a família comprar um quilo de Picanha, daquela bem saborosa e que nem sempre é possível ter nos maravilhosos churrascos com os amigos.

A família poderia comprar $\frac{5000}{50} = 100$ kg desse produto. Em janeiro do ano seguinte, o produto teria aumentado 10%, ou seja, 55,00 reais. Por outro lado, a família agora ganha $5.000 \times 1,15 =$ R\$ 5.750,00, e com esse valor consegue comprar $\frac{5.750}{55} = 104,5$ kg desse produto.

Comparando o “antes e o depois”, a família aumentou em 4,5% o seu poder de compra. A maioria das pessoas pensaria nesse valor? Normalmente, não. Um erro muito comum é desconsiderar a inflação, achando que o aumento de renda de 15% ao ano é o mesmo que um aumento de 15% ao ano no poder de compra. Mas como vimos, à medida que os preços aumentam, o poder de compra do dinheiro vai diminuindo. Outro equívoco é achar que ao final de um ano, o aumento do poder aquisitivo seria de $15\% - 10\% = 5\%$, o que o nosso cérebro tende a fazer naturalmente, num mecanismo de substituição de um problema mais complexo, por um problema mais simples, conforme mostra o prêmio Nobel de Economia, Daniel Kahneman, em seu livro *Rápido e Devagar, duas formas de pensar*.

A diferença entre 5% e 4,5% pode parecer pequena, mas se essa tendência persistir e a renda não crescer a uma taxa igual ou superior que a inflação, o poder de compra do salário vai se reduzindo gradualmente, a cada ano. Temos aqui um dos fatores mais cruéis que impactam na desigualdade social no Brasil. Temos uma excelente oportunidade para refletir sobre o impacto da inflação na vida da população, principalmente a mais pobre e massacrada na sociedade, e pensar no que podemos fazer para rejeitar isso de forma contundente.

A taxa de crescimento de 15% é chamada de **taxa de crescimento aparente**, pois aparentemente o valor do dinheiro, em relação ao poder de compra, cresceu 15%. A quantidade de dinheiro, de fato, aumentou 15%, mas a quantidade de produto que se pode comprar não aumentou em 15%, e sim em 4,5%, chamada de **taxa de crescimento real**.

Uma coisa é a quantidade de dinheiro no bolso, outra coisa é a quantidade de picanha na geladeira.



Ao dividirmos a renda do segundo ano pelo fator de inflação, fazendo $\frac{5.750}{1,1}$, obtemos 5.227,27. Assim, 5.750,00 consegue comprar hoje o que era possível comprar com 5.227,27 um ano atrás. De fato, dispendo de 5.227,27, poder-se-ia comprar $\frac{5.750}{55} \cong 104,5$ kg do produto. O valor do dinheiro, em relação ao seu poder de compra, apresentou uma taxa de crescimento **real** de 4,5 %.

De uma maneira geral, a relação entre a taxa real, a taxa nominal (taxa aparente) e a taxa de inflação é chamada de relação de Fisher (em homenagem ao economista inglês Irving Fisher).

Uma coisa é a taxa que te pagam. Outra coisa é o preço que você paga.

Observação

Se i_a é a taxa aparente, i_r a taxa real e i_f a taxa de inflação, todas referidas a um mesmo período de tempo, então

$$1 + i_r = \frac{1 + i_a}{1 + i_f}$$

De fato, se um capital C , compra hoje n kg de um produto com preço p , isto é, $n = \frac{C}{p}$, passado o período a que se referem as taxas, C crescerá a uma taxa i_a , p aumentará a uma taxa i_f , e a nova quantidade, em kg, será dada por

$$n \cdot (1 + i_r) = \frac{C \cdot (1 + i_a)}{p(1 + i_f)}$$

Logo:

$$(1 + i_r) = \frac{(1 + i_a)}{(1 + i_f)}$$

Em que i_r representa a taxa de crescimento da quantidade do produto, ou seja, do poder de compra.

Essa relação nos permite olhar para além da questão salarial, usada em nossa atividade dispendora, e investigar o retorno real dos investimentos que fazemos, tanto para atingir sonhos como para a nossa aposentadoria. Por exemplo, se um investimento render 15 % a.a., mas a inflação anual for de 10 % a.a., então a capacidade de compra aumentará em, aproximadamente, 4,5 % ao ano. Em outras palavras, isso significa que o ganho real, aquilo que realmente ganhamos em poder de compra, foi de 4,5 % a.a. e não os 15 % como muitos poderiam pensar. Dizer isso é o mesmo que dizer que a taxa aparente foi 15 % a.a. e a taxa real de 4,5 % a.a., devido à inflação de 10 % em um ano.

Essa relação também nos permite comparar retornos em ambientes inflacionários diferentes, e as consequências disso. Por exemplo, fazer um investimento com retorno de 15 % ao ano, em um país com inflação de 10 %, gera um retorno real menor do que para um cidadão que vive em um país onde é possível um investimento com retorno 6,0 % ao ano e 1,0 % de inflação. Subtrair leva a uma falsa conclusão sobre o retorno dos investimentos.

Isso na vida das classes menos abastadas é cruel, porque a inflação faz com que os pobres fiquem cada vez mais pobres, pois manter o poder de compra para inflações mais altas requer reajustes mais altos de salários que anulem o efeito da inflação. E a história nos mostra que nem sempre isso acontece, conforme nos informa, por exemplo, os estudos do economista francês, Thomas Pickety, em seu livro *O capital no Século XXI*.

Retomando as atividades do Explorando: [Inflação e poder de compra](#), vamos discutir a solução de todas elas.



Na [Atividade 31](#), temos duas inflações: a oficial e a que realmente aconteceu para família. E vimos que isso depende do tipo de consumo de cada família.

Usando a relação de Fisher temos

$$\frac{1,15}{1,05} \cong 1,09524$$

$$\frac{1,15}{1,10} \cong 1,04545.$$

Isso significa que o poder de compra da família, aumentou, de fato, 4,54%. No entanto, se considerarmos a inflação oficial, o poder de compra teria aumentado em 9,52%. Nesse caso, a inflação não representaria, de fato, o aumento do poder de compra da família, considerando a inflação da família. Então, ao usar a inflação para avaliar o seu poder de compra você deve sempre se perguntar: essa é a minha inflação?

Na [Atividade 32](#), aplicando a relação de Fisher,

$$\frac{1,10}{1,06} \cong 1,0377$$

$$\frac{1,05}{1,01} \cong 1,0396.$$

Logo, o ganho real de Benedita de 3,96% ao ano foi maior que a taxa de 3,77% ao ano obtida por Maria, ainda que a diferença entre as taxas nominais e reais em cada país sejam iguais. Uma conclusão é que a inflação pode aumentar a desigualdade entre pessoas que ganham mesmos salários, mas que estão submetidas a inflações diferentes.

Na [Atividade 33](#), o valor do aluguel de R\$ 2.564,00 está correto, pois o IGP-M acumulado em fevereiro de 2020 nos últimos 12 meses foi de 6,84%. Aplicando esse valor no aluguel anterior, teremos

$$VF = 2.400 \times 1,0684 = \text{R\$ } 2.564,16.$$

Concluimos essa seção reforçando que a abordagem da noção de inflação na Educação Básica é de fundamental importância para a compreensão de seu impacto no poder de compra das pessoas e, portanto, na capacidade de consumo, planejamento de médio e longo prazo, e na efetiva realização dos sonhos. Ainda que, em alguns aspectos, o indivíduo não tenha praticamente nenhum poder sobre a inflação, a coletividade tem bem mais poder.

A inflação alta gera uma série de problemas, afetando a vida de todas as pessoas, dos empregados aos empregadores, e impacta cruelmente a vida da população de menor poder aquisitivo. Para quem tem pouco, retirar pouco é na verdade impor-lhe uma grande perda, tanto de salários como de direitos ou de poder de compra. Para outras famílias com menor poder aquisitivo, pode representar o adiamento de uma série de projetos e sonhos. Produtos mais caros, menos dinheiro poupado, menos sonhos realizados. Simplificado, porém bem real. Por isso é tão importante uma inflação em níveis que permitam que o crescimento dos salários seja maior que o aumento generalizado e consistente dos preços. É uma questão de justiça com quem trabalha e faz desse país o gigante que ele é e sempre será.

Uma sociedade mais consciente e bem informada pode agir de forma a interferir em alguns mecanismos que interferem diretamente na inflação. O produto é caro por que tem gente que compra. Se não comprarem, o preço tende a cair. Então, entender alguns fatores que influenciam a inflação, bem como o mecanismo da oferta e demanda, pode ajudar as pessoas a perceberem o poder de influência nos preços que em alguns casos podem ter.



Objetivos Específicos

De quanto é a inflação anual no Brasil?

- Investigar situações financeiras que envolvem a noção de inflação e possíveis impactos na vida da população
- Resolver problemas relacionados às noções de inflação e poder de compra
- Analisar e tomar decisões em situações econômico-financeiras que envolvam a noção de inflação, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos.

Nota 20

Objetivos Específicos

Inflação e investimento: impactos nos projetos de longo prazo

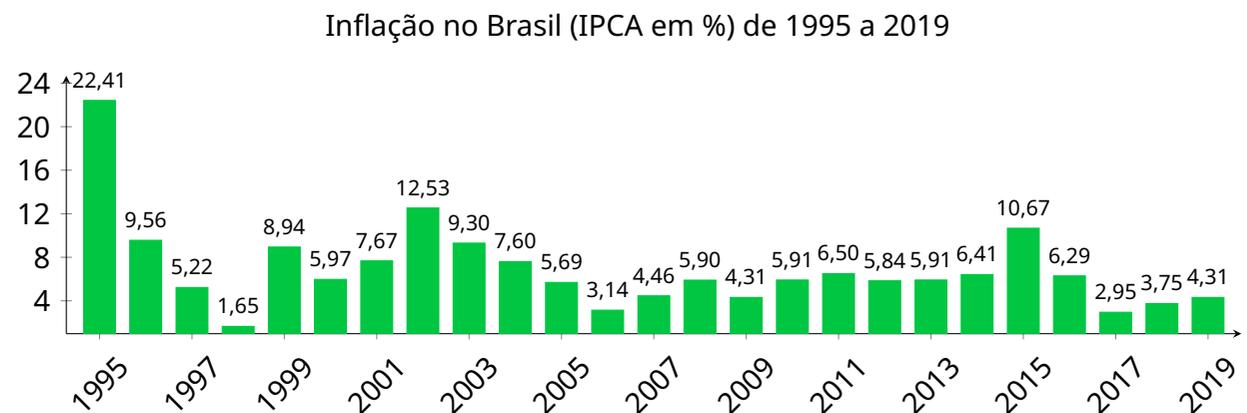
- Investigar situações financeiras que envolvem a noção de inflação e possíveis impactos na vida da população
- Resolver problemas relacionados às noções de inflação e poder de compra.

Nota 21

Atividade 34

De quanto é a inflação anual no Brasil?

Considere o gráfico a seguir.



Elaborado a partir de dados do IBGE (2022b).

- Qual foi a inflação anual média considerando os anos de 2015 a 2016?
- Qual foi a inflação anual média considerando os anos de 2017 a 2019?
- Qual foi a inflação anual média nesse período de 1995 a 2019?
- Considere que um operário ganhasse R\$ 1.000,00 no início de 1995. Qual deveria ser o salário dele no início de 2020 para que o seu poder de compra
 - se mantenha o mesmo?
 - aumentasse em 100%?
- Considere um operário viajante no tempo e a empresa em que ele trabalha lhe oferecesse duas opções
 - Ganhar um salário de R\$ 1.000,00 no início de 1995
 - Ganhar um salário de R\$ 1.400,00 no início de 1998.
 Em qual opção o operário teria o maior poder de compra?

Atividade 35

Inflação e investimento: impactos nos projetos de longo prazo

Sérgio pretende depositar 1.000,00 reais mensalmente durante 30 anos, a começar de hoje, a uma taxa de 0,5% ao mês. Se ele conseguir manter a disciplina e as condições permitirem, ele terá acumulado ao final do período aproximadamente 1 milhão de reais. Se a inflação média nesse período for de 4% ao ano, qual será o poder de compra desses 1 milhão de reais daqui a 30 anos, na comparação com os dias atuais?



PARA O PROFESSOR: TRIBUTAÇÃO E FUTURO

Objetivos específicos

- Abordar noções de tributos e contribuições, suas finalidades e consequências de suas boas aplicações em áreas estratégicas para o país.

Conceitos abordados: O Imposto de Renda (IR), a contribuição para o INSS.

Aspectos matemáticos: razão, proporção, média (aritmética simples, ponderada e geométrica), taxas e fatores, funções afins, funções definidas por várias afins, porcentagem, gráficos de colunas e setores

Aspectos não matemáticos: tributos, contribuições, políticas públicas, previdência, proteção de longo prazo.

Habilidades da BNCC

Habilidades da BNCC

EM13MAT101 Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

EM13MAT104 Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.

EM13MAT203 Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

EM13MAT405 Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

Recomendações para o professor

Organização em sala de aula esse é um tema que pode ser trabalhado em turmas do Ensino Fundamental e do Médio. Trabalhar em grupos será ótimo se o professor optar por pesquisas sobre quantos impostos temos; para onde vai o dinheiro; quais os tributos municipais; os avós continuam trabalhando. A pesquisa individual e coletiva devem ser complementares.

Dificuldades previstas as habilidades de leitura e interpretação podem ser um ponto de dificuldade dos alunos. A identificação e uso das médias também. No IPCA temos uma média aritmética ponderada em relação a cestas de produtos, mas temos uma média geométrica quando queremos descobrir a taxa média mensal, dadas taxas mensais reais em um ano, por exemplo. Tanto no cálculo do novo INSS quanto do IR temos tabelas progressiva que costumam dar trabalho mental até para os professores de matemáticos, pois os modelos matemáticos envolvem funções definidas por várias afins. O uso da calculadora pode ser importantíssimo para reduzir tais desafios cognitivos, e as planilhas eletrônicas podem ajudar na construção dos modelos funcionais de cálculos de alguns impostos.

Sugestões gerais uma possibilidade para se abordar esse tema é quando estiver trabalhando conceitos como porcentagem, números racionais, ou ainda conceitos de estatística. O professor pode aproveitar sua programação de conteúdos e habilidades para trabalhar tributos e contribuições que dependam de tais conteúdos e habilidades.



As atividades que do livro aberto sobre o tema são ricas e variadas, e muitas delas podem ser aplicadas diretamente já no Ensino fundamental. Cabe ao professor avaliar e/ou adaptar para a sua realidade.

Leve em consideração, sempre que puder, o contexto sócio-econômico dos estudantes na abordagem desse tema. As atividades que levam em consideração podem produzir um nível de engajamento e pertencimento bem maior do que lidar somente com orçamentos e planejamentos que lhe são tão distantes, com consumos totalmente irreais naquele momento.

A parte da estatística que pode ser (não necessariamente tem que ser) trabalhado, tais como média móvel, série histórica (despesas com luz, gás, telefone), pode ser um ponto de dificuldade, todavia, tem enorme potencial de aplicação e de compreensão das regularidades e sazonalidades das receitas e despesas pessoais e familiares.

Enriquecimento da discussão Recomendamos o trabalho de N.C Dias (2018) sobre a educação fiscal e educação financeira na Educação Básica para servir de apoio para o professor na abordagem do assunto desta seção.

Reforçamos que esse é um ótimo tema para se usar ferramentas digitais para organizar e analisar dados, dentre elas, destacamos planilhas eletrônicas. Sugerimos que a inserção no mundo das planilhas pode ser feita por meio da abordagem desse tema.

Temos uma excelente oportunidade de usar planilhas para aprender noções de planejamento e orçamento, e ao mesmo tempo, investigar situações financeiras para aprender ou reforçar noções matemáticas e desenvolver habilidades de construção de planilhas eletrônicas.

As operações são geralmente simples, e a estrutura tabular, justamente com a lógica dos comandos básicos, podem ajudar na construção de orçamentos e a investigar problemas e soluções.



8 TRIBUTAÇÃO E FUTURO

Você já parou para pensar que você paga imposto em praticamente tudo o que você consome? Praticamente todos os bens e serviços que usamos e consumimos são tributados, da água que sai da torneira das nossas casas ao combustível do veículo ou do sapato que nos leva para a escola, a cadeia de tributos e impostos está sempre ao nosso lado.



Para refletir

Mas o que são impostos e tributos? Para que eles servem? Como é a carga tributária no Brasil? Pagamos muito ou poucos impostos? Os impostos são bem aplicados em infraestrutura, segurança, saúde, educação pública e de qualidade? Quais são os aspectos matemáticos presentes nos impostos?

Entendemos que pensar em tributos não significa apenas saber o quanto se paga, mas também como e porque é pago e com qual finalidade o dinheiro é usado. Além disso, é muito importante refletir sobre como um povo quer usar os seus recursos para definir que tamanho de Estado quer ter. Essa escolha demanda dos cidadãos brasileiros muita reflexão, educação e senso de coletividade. Um país forte, que oferece serviços públicos de qualidade ao seu povo, precisa de uma malha fiscal e tributária que seja compatível com as escolhas desses serviços e do nível e oferta dos mesmos. Qual é a qualidade dos serviços públicos que você deseja?

Para tentar responder a essas e outras perguntas, convidamos você a uma pequena viagem nesse mundo tributário, que alguns chamam de educação fiscal, mas que aqui também vamos chamar de educação financeira.

Explorando

Tributação e Futuro

Atividade 36

Investimento em educação pública no Brasil

Leia atentamente as informações abaixo, extraídas do Portal da Transparência em julho de 2020.

Tabela 21: Valores relacionados ao investimento em educação no Brasil, em bilhões de reais.

Ano	Orçamento atualizado para a área de educação	Total de despesas executadas para a área de educação
2016	109,90	95,18
2017	115,11	101,82
2018	114,31	95,59
2019	118,40	97,47
2020	108,67	44,92

Dados do Portal da Transparência (2020)

- Nesses cinco anos, o dinheiro efetivamente investido em educação tem aumentado ou diminuindo?
- Construa um gráfico de barras, apresentando o percentual do PIB do Brasil que foi investido em educação nesses cinco anos.

Os investimentos em Educação pública no Brasil têm correspondido a mais de 100 bilhões de reais de 2016 a 2020, pelo menos. De 2017 a 2020 o dinheiro efetivamente gasto com educação tem diminuído.

Sugestões e discussões

Investimento em educação pública no Brasil

O professor pode pedir ao alunos que meçam as variações percentuais ocorridas ano a ano. É possível também discutir os dados referentes ao ano de 2020, que estão incompletos em virtude da data da consulta. Mas a proporcionalidade pode servir para fazer uma estimativa.

Solução

Investimento em educação pública no Brasil

Para resolver o **item b**, será necessário fazer uma pesquisa do PIB brasileiro no período de 2016 a 2020.

No **item c**, basta calcular 10% da soma das despesas executadas de 2016 a 2020. A resposta sobre possíveis consequências é individual.



- c) Suponha que houvesse uma redução de 10% no valor dos impostos, e que essa também fosse a redução percentual no total de dinheiro efetivamente gasto (despesas executadas) com educação. Quantos bilhões de reais deixariam de ser gastos com educação de 2016 a 2019? Apresente algumas possíveis consequências dessa redução na vida de milhões de estudantes em todos o país.



Você Sabia?

No Brasil, temos uma **grande variedade** de tributos. São tributos dos mais diversos, desde os conhecidos pela maior parte da população, como o Imposto sobre a renda e proventos de qualquer natureza (IR), Imposto sobre Produtos Industrializados (IPI), Imposto Territorial Rural (IPR), Imposto sobre Propriedade de Veículos Automotores (IPVA), Imposto sobre a Propriedade predial e Territorial Urbana (IPTU), Imposto sobre a importação de produtos estrangeiros (II), entre outros, até alguns menos conhecidos, como Imposto sobre Operação de Crédito, Câmbio e Seguro ou relativas a Títulos ou Valores Mobiliários (IOV), Imposto sobre Transmissões Causa Mortis e Doações de Qualquer Bem ou Direito (ITCMD), Imposto sobre Transmissão inter vivos de Bens e Imóveis e de direitos reais a eles relativos (ITBI), etc.

Em 2020, além dos variados impostos, o Brasil tinha, aproximadamente, 28 tipos de taxas — como Taxa de Coleta de Lixo, Taxa de Conservação e Limpeza Pública, Taxa de Emissão de Documentos, Taxa de Licenciamento Anual de Veículo —; 37 contribuições — como INSS, Programa de Integração Social (PIS), Contribuição para o Financiamento da Seguridade Social (COFINS), Contribuição Provisória sobre Movimentação Financeira (CPMF), Contribuição sindical, Patronal, Contribuições de melhoria (podendo estas serem implementadas pelo município, pelo estado e pela União).

Organizando

Imposto, Taxa e Contribuição no Brasil

Impostos, taxas e contribuições fazem parte da vida da grande maioria da população mundial. É função do governo prover serviços básicos para a população, como saúde, educação, saneamento básico e segurança. A arrecadação de tributos é responsável pela maior parte da receita pública que mantém a administração governamental de recursos financeiros para a realização de seus fins (A. P. Lima, 2009).

Observação

De acordo com o Código Tributário Nacional, os tributos podem ser classificados como impostos, taxas e contribuições de melhoria.

O Código prevê, ainda, a possibilidade de incidência de contribuições sociais e profissionais (sindical, para previdência social, para fundo de assistência, para o Fundo de Garantia do Tempo de Serviço, dentre outras). Vejamos brevemente o que são impostos, taxas e contribuições de melhoria.

Os impostos são cobrados sobre patrimônios (IPTU, ITBI, IPR, IPVA), renda (IR), circulação de mercadorias (Imposto sobre Circulação de Mercadorias e Prestação de Serviços (ICMS), IPI), contratação de serviços (Imposto Sobre Serviços (ISS)), operações financeiras (Imposto sobre Operações Financeiras (IOF)), dentre outros. O valor arrecadado em impostos não é revertido diretamente para o contribuinte, mas em serviços básicos para a população como um todo, sendo o governo o responsável pela distribuição e direcionamento dos investimentos para cada segmento — saúde, educação, segurança, etc.



Nem tudo o que chamamos de taxas são impostos. As taxas tributárias são vinculadas à prestação de algum serviço do Estado diretamente ao contribuinte. Alguns exemplos são os documentos emitidos por órgãos públicos, como prefeituras e os departamentos de trânsito estaduais e taxa de coleta de lixo.

Segundo o Código Tributário Nacional, a contribuição de melhoria é cobrada com o objetivo de repor o custo de obras públicas que resulte em valorização imobiliária. O proprietário deve pagar esta contribuição como decorrência do enriquecimento gerado pela valorização imobiliária a partir de uma obra realizada pelo governo municipal, estadual ou federal.

Uma contribuição muito comum no Brasil é a que os trabalhadores pagam para o Instituto Nacional de seguridade Social (INSS), que tem como objetivo a *proteção do trabalhador e sua aposentadoria*.

O INSS foi criado em 1990 e tem como função recolher as contribuições e pagar os benefícios de aposentadorias e pensões do Regime Geral de Previdência Social. Cada trabalhador contribui com uma quantia mensal, por vários anos, e após uma certa idade, tempo de contribuição ou invalidez permanente, tem o direito a receber uma aposentadoria. No caso de morte, seu beneficiário tem direito a receber uma contribuição mensal, chamada de pensão. Outra função do INSS é reconhecer o direito, a manutenção e o pagamento de benefícios assistenciais previstos na legislação.

Mas quanto os trabalhadores deste regime de previdência, que abrange mais de 50 milhões de segurados e 33 milhões de segurados, pagam por mês?

Em 2020, o cálculo do INSS mudou, para um sistema de cobrança progressiva por faixas. Isso significa que o cálculo é feito aplicando-se percentuais diferentes em cada faixa do salário do trabalhador, dependendo de quanto ele ganha. Para entender como funciona essa cobrança, vamos calcular o INSS para 4 diferentes trabalhadores, com base na tabela de 2022, apresentada a seguir.

Salário de Contribuição (R\$)	Alíquota para fins de recolhimento ao INSS (%)
Até 1.212,00	7,5
De 1.212,01 a 2.472,35	9,0
De 2.427,36 a 3.641,03	12,0
De 3.641,04 a 7.087,22	14,0

Caso 1 – João ganha R\$ 1.200,00. Quanto ele paga de INSS?

Neste caso, considerando que o salário de contribuição é de R\$ 1.200,00, o percentual a ser aplicado é único e igual a 7,5 % conforme mostra a tabela.

$$\begin{aligned} \text{INSS} &= 1.200,00 \times 7,5 \% \\ &= \text{R\$ } 90,00 \end{aligned}$$

Logo, João contribuirá com 90,00 reais, por mês, para o INSS, enquanto os valores não forem reajustados.

Esse cálculo vale para pessoas que ganhavam até R\$ 1.212,00, em 2022.

Caso 2 – Maria ganha R\$ 2.000,00. Quanto ela paga de INSS?

Neste caso o cálculo é dividido em 2 partes.



- i) Paga 7,5 % sobre R\$ 1.212,00, ou seja, R\$ 90,90.
- ii) Paga 9 % sobre R\$ 788,00, que é a diferença entre R\$ 2.000,00 e R\$ 1.212,00, ou seja, R\$ 70,92;

A tabela a seguir apresenta os valores por faixas, e o total a ser pago neste caso.

Tabela 22

Faixas (R\$)	Alíquota %	Valor a ser pago
1.212,00	7,5	90,90
788,00	9,0	70,92

Logo no total o valor é a soma de cada parte.

Total (R\$)	Alíquota %	Valor a ser pago
2.000,00	8,1	161,82

Observe que Maria pagará R\$ 161,82 de INSS, e isso representa 8,1 % do salário dela.

Caso 3 – Fábio ganha R\$ 3.500,00. Quanto ele paga de INSS?

Neste caso o cálculo é dividido em 3 partes.

- i) Paga 7,5 % sobre R\$ 1.212,00, ou seja, R\$ 90,90 de contribuição;
- ii) Paga 9 % sobre R\$ 1.215,35, que é a diferença entre R\$ 2.427,35 e R\$ 1.212,00, ou seja, R\$ 109,38;
- iii) Paga 12 % sobre R\$ 1.072,52, que é a diferença entre R\$ 3.500,00 e R\$ 2.427,35, ou seja R\$ 128,72.

A tabela a seguir apresenta os valores por faixas, e o total a ser pago neste caso.

Faixas (R\$)	Alíquota %	Valor a ser pago
1.212,00	7,5	90,90
1.215,35	9,0	109,38
1.072,65	12,0	128,72
3.500,00	9,4	329,00

Observe que Marcela pagará R\$ 329,00 de INSS, e isso representa 9,4 % do salário dela.

Caso 4 – Marcela ganha R\$ 4.500,00. Quanto ela paga de INSS?

Neste caso, o cálculo é dividido em 4 partes.

- i) Paga 7,5 % sobre R\$ 1.212,00, ou seja, R\$ 90,90 de contribuição;
- ii) Paga 9 % sobre R\$ 1.215,35, que é a diferença de R\$ 2.427,35 de R\$ 1.212,00, ou seja, R\$ 109,38;
- iii) Paga 12 % sobre R\$ 1.213,68, que é a diferença de R\$ 3.641,03 de R\$ 2.427,35, ou seja, R\$ 145,64;
- iv) Paga 14 % sobre R\$ 858,97, que é a diferença de R\$ 4.500,00 de R\$ 3.641,03, ou seja, R\$ 120,26;



A tabela a seguir apresenta os valores por faixas, e o total a ser pago neste caso.

Faixas (R\$)	Alíquota %	Valor a ser pago
1.212,00	7,5	90,90
1.215,35	9,0	109,38
1.213,68	12,0	145,64
858,97	14,0	120,26
4.500,00	10,4	466,18

Observe que Fábio pagará R\$ 466,18 de INSS, e isso representa 10,4 % do salário dele.

Esse novo sistema permitiu que as pessoas que ganham próximo a um salário mínimo pagassem menos INSS. E quem ganha mais, pagasse mais do que no sistema anterior.

Por exemplo, uma pessoa que ganhava R\$ 1.000,00 em 2020, antes da reforma, pagava 8 % sobre o salário. Logo pagava 80,00 reais. E agora pagaria 75,00 reais de INSS.

Por outro lado, uma pessoa que ganhava R\$ 7.000,00 mensais, antes da mudança pagaria 11 % sobre o salário, ou seja, pagaria R\$ 770,00 de INSS. Agora, com o novo sistema, essa mesma pessoa pagará aproximadamente 816,00 reais mensais de INSS, ou seja, quase 50,00 reais a mais por mês, o que resulta em 600,00 reais, só no ano de 2022.

Outra característica desse sistema, tanto na versão antiga quanto na nova, é que há um teto de cobrança do INSS.

Em julho de 2020, o teto do INSS estava estabelecido em R\$ 6.101,10. Ou seja, o valor máximo de INSS cobrado dos trabalhadores, em 2020, foi de R\$ 713,10.

Em julho de 2022, o teto do INSS estava estabelecido em R\$ 7.087,22. Ou seja, o valor máximo de INSS cobrado dos trabalhadores, em 2022, foi de R\$ 828,39.

Observação

Essa informação é importante pois requer que as pessoas que ganham mais do que isso se organizem financeiramente para buscarem outros meios para comporem uma aposentadoria maior, que seja compatível com uma renda maior. Muitos buscam uma previdência privada, outros fazem investimentos mensais (o que exige muita disciplina e dinheiro, é claro), e outras gastam tudo e não se preocupam com o futuro.

Mas, se as pessoas quiserem manter seu padrão de vida, devem se organizar para complementarem o que vão receber do Instituto Nacional do Seguro Social (INSS), pois caso contrário, terão que tentar reduzir o padrão de vida, gastando menos, ou serão que continuar trabalhando para manter o padrão, pois a aposentadoria provavelmente não vai dar para custear as despesas dessa fase da vida. Como custear os gastos específicos muito comuns com a terceira idade com medicamentos, planos de saúde e cuidados especiais numa fase da vida onde não se tem tanta energia e nem tanta capacidade de trabalho como se tinha antes, principalmente numa sociedade onde a expectativa de vida é cada vez maior, conforme ilustram as pirâmides nas [Figuras 25 e 26](#).



Figura 25: Pirâmides etárias absolutas do Brasil, anos de 2013, 2022.

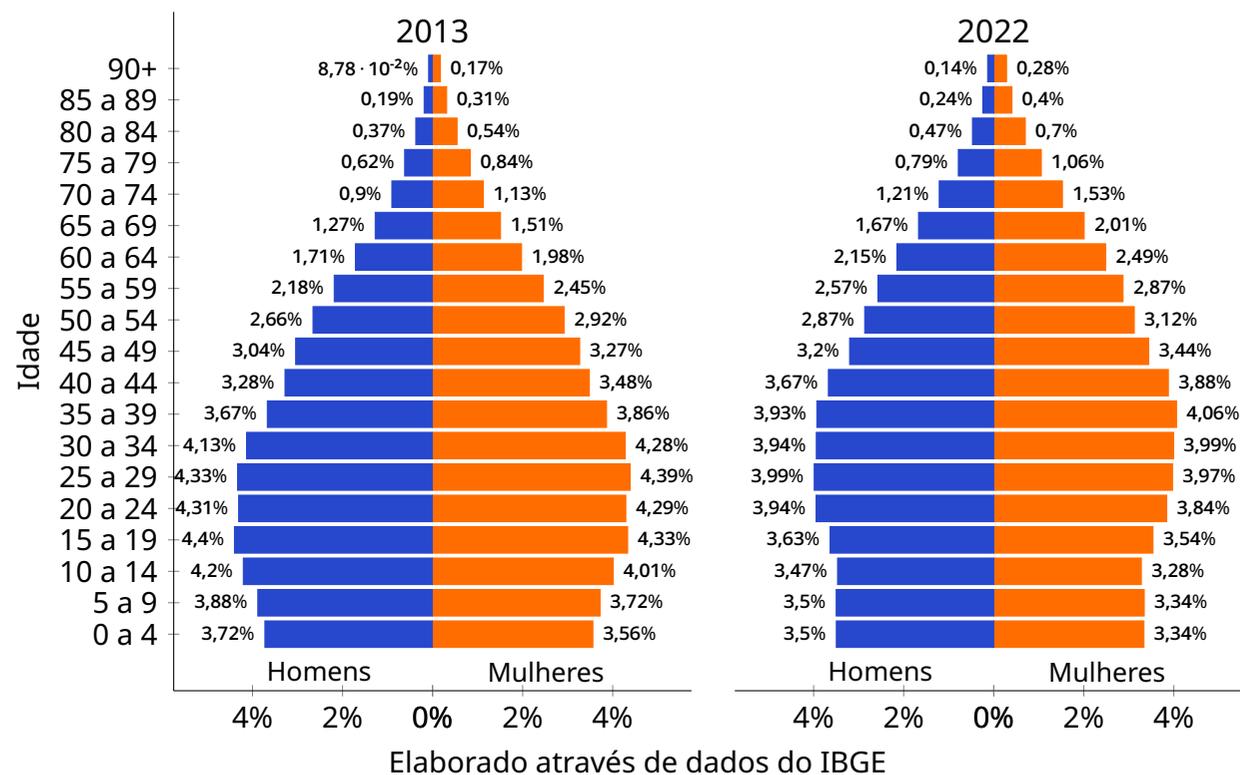
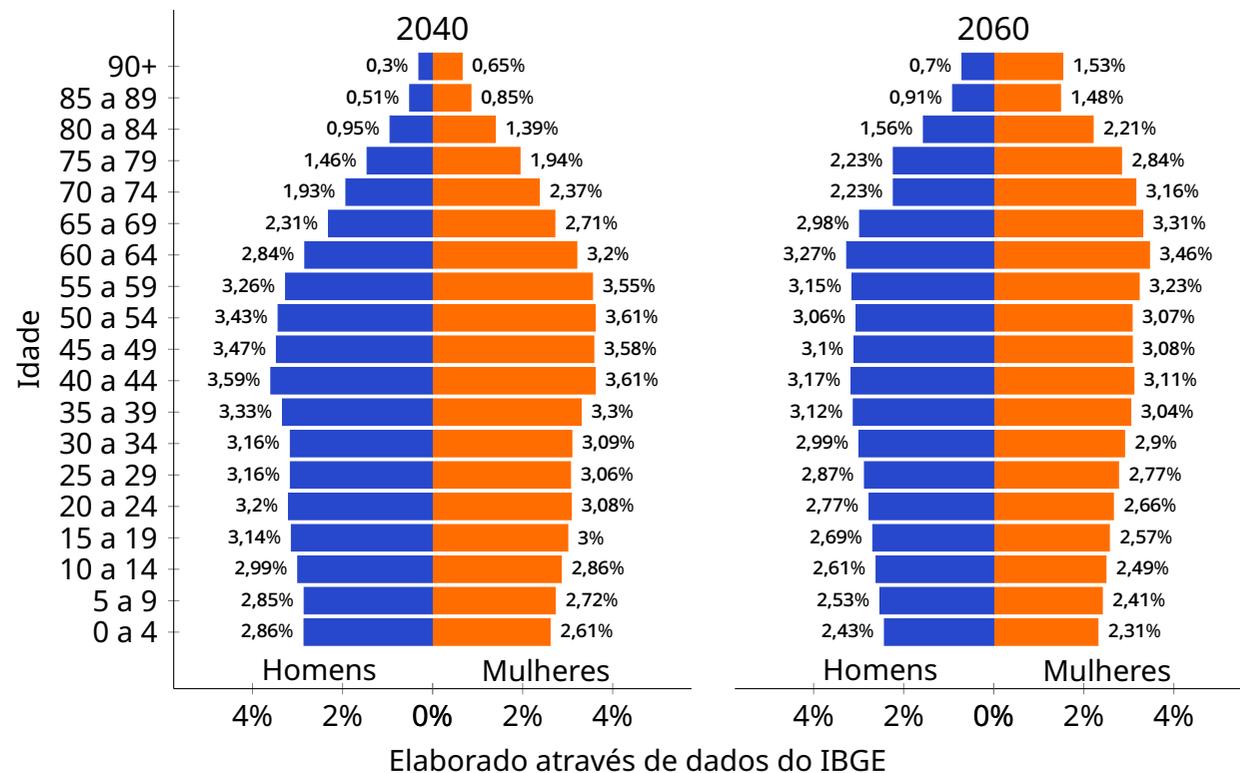


Figura 26: Projeções para 2040, 2060. Como aponta da Costa (2010), pessoas com mais de 65 anos serão mais de um quarto dos brasileiros, grupo que em 2013 representava 7,3% da população.



A seguir, vamos tratar de outro imposto importante: o Imposto de Renda (IR). Diante da grande quantidade de tributos que temos no Brasil e do escopo deste livro, optamos por abordar alguns



aspectos do IR que é um dos principais impostos no Brasil: tanto o aplicado especificamente sobre os investimentos, como o aplicado sobre a renda de uma maneira geral, incluindo salários, aluguéis, ou outros rendimentos tributáveis.

O imposto de renda

No Brasil, um dos tributos mais importantes, e uma das maiores fontes de receita para o governo federal poder investir em saúde, educação, segurança e infraestrutura é o Imposto de Renda. O IR, incluindo salários e aluguéis, diferentemente da tributação específica sobre os investimentos, é calculado de forma progressiva, aplicando percentuais diferentes por faixa de renda, de forma que, quanto mais se ganha, mais se paga. Isso para pessoas físicas, como os empregados e funcionários públicos, por exemplo. Para empresários e pessoas jurídicas, de uma maneira geral, os cálculos podem ser bem diferentes.

Convidamos você a investigar com a gente como o IR é calculado por uma função definida por várias sentenças, e qual a sua importância para o povo brasileiro.

Para o ano de 2020, a tabela do IR foi a seguinte:

Base de cálculo (R\$)	Alíquota (%)	Parcela a deduzir do Imposto de Renda (R\$)
Até 1.903,98	—	—
De 1.903,99 a 2.826,65	7,5	142,80
De 2.825,55 a 3.751,05	15,0	354,80
3.751,06 a 4.664,68	22,5	636,13
Acima de 4.664,68	27,5	869,36

Mas o que é a base de cálculo? É o salário de uma pessoa? E como aplicar esses percentuais sobre a base de cálculo?

O primeiro passo para entendermos o IR é saber que as alíquotas (percentuais) são aplicadas sobre a receita líquida de uma pessoa, também chamada *base de cálculo*, que é obtida essencialmente pela diferença entre as receitas e algumas despesas (chamadas de dedutíveis). De forma simplificada, pegamos os rendimentos brutos de uma pessoa (salários, aluguéis recebidos, outros rendimentos tributáveis) e retiramos o que ela paga de INSS, plano de saúde, educação pessoal e dos dependentes, e mais alguns outros valores que não são tributáveis. Assim, o imposto é calculado sobre uma receita líquida.

Vamos fazer uma simulação usando um aplicativo da Receita Federal?¹ Para isso, vamos considerar inicialmente uma pessoa solteira que ganha R\$ 6.000,00 mensais, não tem dependentes (filhos até 21 anos ou até 24, se universitários; pais idosos com mais de 65 anos; cônjuge, etc.). Já vimos que, para essa faixa de renda, essa pessoa pagará aproximadamente R\$ 700,00 mensais de INSS. Considere ainda que ela pague aproximadamente R\$ 400,00 de plano de saúde privado.

Para entender o cálculo do IR mensal, vamos dividir uma simulação em duas partes:

- Parte 1 — Cálculo da base de cálculo;
- Parte 2 — Cálculo do IR.

¹Disponível em <https://www27.receita.fazenda.gov.br/simulador-irpf/>.



A simulação a seguir mostra a Parte 1.

IMPOSTO SOBRE A RENDA MENSAL - Valores em Reais

1. Rendimentos tributáveis	6.000,00
2. Deduções	
2.1 Previdência Oficial	700,00
2.2 Dependente (quantidade) <input type="text" value="0"/>	0,00
O valor da dedução é R\$ 189,59 mensais, por dependente.	
2.3 Pensão alimentícia	0,00
2.4 Outras deduções	400,00
Previdência Privada, Funpresp, FAPI e Parcela isenta de aposentadoria, reserva remunerada, reforma e pensão para declarante com 65 anos ou mais, caso não tenha sido deduzida dos rendimentos tributáveis. Carne-Leão: Livro Caixa.	
2.5 Total de Deduções	1.100,00
<small>* Para mais informações sobre deduções verificar IN RFB nº 1500, de 2014.</small>	
3. Base de cálculo (1 - 2.5)	4.900,00

Na segunda parte, fazemos o cálculo do IR usando uma tabela com alíquotas crescentes, conforme se ganha mais.

4. Imposto				478,14
Demonstrativo da Apuração do Imposto				
	Faixa da Base de Cálculo	Alíquota	Valor do Imposto	
	1ª Faixa	0,0%	1.903,98	0,00
	2ª Faixa	7,5%	922,67	69,20
	3ª Faixa	15,0%	924,40	138,66
	4ª Faixa	22,5%	913,63	205,57
	5ª Faixa	27,5%	235,32	64,71
	Total	---	4.900,00	478,14
5. Alíquota efetiva - % 7,97 Percentual do imposto sobre os rendimentos tributáveis.				
Senhor contribuinte, apesar do seu rendimento estar na faixa de 27,50%, sua alíquota efetiva é de 7,97%				

É possível perceber que o cálculo é muito semelhante ao cálculo da contribuição previdenciária para o INSS, mudando apenas as alíquotas e as faixas, sendo o destino do imposto, também diferente.

Vale dizer que se essa pessoa tivesse dependentes, a base de cálculo seria menor, pois cada dependente gera uma redução nessa base. Outras despesas, como as médicas e com instrução dentro e fora do país, também são dedutíveis, estas últimas limitadas a um teto.



O IR contribui diretamente para a melhoria da qualidade de vida dos cidadãos brasileiros. Para uma pessoa receber atendimento médico de urgência, fazer um exame no Hospital Público, ser atendida por um médico em uma Unidade de Pronto Atendimento (UPA), fazer uma cirurgia pelo Sistema Único de Saúde (SUS), dentre tantos outros atendimentos, é preciso investimentos do setor público. E tudo isso é feito com dinheiro de tributos, dentre eles o Imposto de Renda. O mesmo vale para creches, escolas, praças, parques públicos, delegacias, desenvolvimento de vacinas, pesquisas de ponta em Universidades, dentre outros. A gestão da aplicação dos recursos deve sempre ser cobrada por cada uma das pessoas que contribuem com seus impostos para cada uma das áreas em que eles são aplicados, tais como educação básica e superior gratuita e de qualidade, Centros de Pesquisas Tecnológicas nas Universidades Públicas, hospitais públicos que salvaram muitas vidas na pandemia da COVID-19, Institutos de Pesquisa como a Fiocruz e o Butantã, que tiveram um papel estratégico importante, a segurança pública, os investimentos de infraestrutura, tais como portos rodovias, ferrovias, aeroportos, agências reguladoras, dentre muitos outros.

Esperamos que o texto tenha contribuído para ampliar seus conhecimentos sobre os tributos no Brasil, e importância deles para você e para toda a sociedade. E isso não significa que a tributação que temos hoje é adequada ou justa. A tributação no Brasil pode e deve ser melhorada, e muito. Entretanto, os problemas tributários não deveriam excluir o estado de sua responsabilidade de oferecer serviços públicos de qualidade, pois todos usam, direta ou indiretamente, serviços de segurança pública, bombeiros, educação pública, saúde, etc, cujos investimentos e melhorias só são possíveis com o dinheiro arrecadado por meio de tributos. Toda a sociedade precisa entender que estamos todos conectados. Ainda que você não use alguns serviços públicos, com certeza você tem alguém perto de você, de quem gosta muito e que serve ou cuida de você, quem sabe até trabalhe para sua família, por exemplo, que usa e depende frequentemente de variados serviços públicos. Estamos todos conectados e precisamos lutar para que todos tenham acesso a serviços contribuam para a saúde e a dignidade humana.

Esperamos ter dado uma pequena contribuição na missão de construir a cidadania e a identidade de um povo que tem um país rico que não pode ser tão desigual e não ter mentalidade de crescimento para todos.

Praticando

Tributação nos Investimentos

No Brasil, há uma grande variedade de investimentos, sendo que alguns são tributados e outros não. A poupança, por exemplo, é isenta de tributação, assim como os investimentos em fundos imobiliários. Já o mercado de ações, o tesouro direto, dentre outros, são tributados de forma escalonada.

Vejamos um exemplo de como esse tipo de tributação é regressiva.

Tributação do IR nos investimentos

Suponha que você tem R\$ 200.000,00, e, como não tem planos para gastar essa grana nos próximos 3 anos, precisa decidir onde vai aplicar esse dinheiro. Inicialmente, você tem duas opções:

Opção I – taxa de retorno de 0,7 % ao mês, sem cobrança de impostos.

Opção II – taxa de retorno de 0,9 % ao mês, mas com cobrança de impostos calculados sobre os juros proporcionados pelo investimento, os quais dependem do tempo de aplicação, conforme a [Tabela 23](#).

Objetivos Específicos

Tributação do IR nos investimentos

- Operar com porcentagens para calcular descontos sobre a rentabilidade de investimentos.
- Comparar investimentos tributáveis e não tributáveis, e usar matemática como apoio na tomada de decisão.

Sugestões e discussões

Tributação do IR nos investimentos

O professor pode discutir as diferenças entre poupança e investimento, levando em consideração a relação risco x retorno, objetivos e agora a tributação. O papel dos tributos e sua boa gestão para a sociedade deve ser levantado.

[Nota 22](#)



Tabela 23: Alíquota do IR a partir do tempo de aplicação.

Prazo	Alíquota do IR (%)
Até 180 dias	22,5
Entre 181 e 360 dias	20,0
Entre 361 e 720 dias	17,5

- a) Se você deixar o dinheiro investido por cinco meses, qual a diferença em reais da rentabilidade da **Opção II** sobre a **Opção I**?
- b) E se você deixar o dinheiro aplicado por 2 anos, qual seria a diferença em reais?
- c) Na medida que tributamos tais investimentos, podemos garantir assistência para várias pessoas da sociedade, tais como as atendidas pelo SUS. O que você pensa a respeito disso?

Olhando para as duas simulações, podemos concluir que a incidência do IR sobre os investimentos não significa que eles sejam menos vantajosos financeiramente. Tal decisão vai depender das opções disponíveis, das taxas cobradas e do prazo do investimento, dentre outros aspectos.



PARA O PROFESSOR: CONSUMO, CULTURA, COMPORTAMENTO E SUSTENTABILIDADE

Objetivo geral

- Refletir sobre a tomada sobre de decisões de consumo, envolvendo cultura, comportamento e sustentabilidade, em especial sobre as heurísticas e vieses presentes nas ações de consumo e suas possíveis consequências.

Conceitos abordados Aspectos matemáticos: razão; proporção; média (aritmética simples, ponderada e geométrica); taxas e fatores; porcentagem, gráficos de colunas ou setores.

Aspectos não matemáticos: ancoragem, enquadramento, teoria da perspectiva, sustentabilidade, desperdício, consumismo, obsolescência programada e sustentabilidade.

Habilidades da BNCC envolvidas

Habilidades da BNCC

EM13MAT101 Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

EM13MAT104 Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.

Recomendações para o professor

Organização em sala de aula Esse é um tema super bem aceito pelos estudantes. O professor pode, inclusive, começar um curso de educação financeira para o Ensino Médio por ele. Pedir aos alunos para relatarem suas preferências de consumo, como tomam decisões, se já se sentiram enganados ou influenciados por uma propaganda podem ser ótimos pontos de partida. Refletir sobre consumo e usar matemática para avaliar opções pode levar a descobertas incríveis. Convide-os a criar a cultura de investigar os fundamentos e a razoabilidade das informações veiculadas nas mídias sociais de forma fundamentada.

Dificuldade previstas As habilidades de leitura e interpretação de gráficos podem ser pontos de dificuldades dos alunos, mas em geral, as dificuldades vão depender da quantidade de informações que estarão disponíveis para a análise e tomada de decisão.

Sugestões gerais Uma possibilidade para se abordar esse tema é quando estiver trabalhando conceitos como porcentagem, números racionais, ou ainda conceitos de estatística. O professor pode aproveitar sua programação de conteúdos e habilidades para trabalhar questões de consumo e sustentabilidade que dependam de tais conteúdos e habilidades.

Um trabalho interdisciplinar com professores da filosofia e sociologia podem contribuir e muito para ampliar a visão sobre o consumo e avaliar diferentes pontos de vista sobre as escolhas e as consequências dessas atitudes.

Sempre que possível, considere o contexto sócio-econômico dos estudantes na abordagem desse tema. As atividades que levam em consideração podem produzir um nível de engajamento e pertencimento bem maior do que lidar somente com orçamentos e planejamentos que lhes são distantes, com consumos totalmente irreais naquele momento.

Nesta seção, temos a oportunidade de convidar os estudantes a pesquisarem sobre direitos e deveres do consumidor. Lutar por seus direitos é uma característica dos adolescentes. Explore



esse momento deles para convidá-los a saber mais sobre seus direitos e deveres, tanto como consumidores, mas principalmente como cidadãos. A cidadania sem direitos e deveres não pode ser exercida de maneira plena e democrática. O professor pode usar um guia do PROCON RJ para saber mais sobre o assunto, o qual está disponível em <http://www.procon.rj.gov.br/index.php/publicacao/listar/3/1>.

Enriquecimento da discussão

Esse tema é muito amplo. Talvez seja um dos temas mais estudados no mundo em relação ao comércio de bens e serviços, pois entender as preferências das pessoas é um negócio bilionário. A matemática desta seção é em geral bem simples, mas alguns cuidados precisam ser tomados:

Cuidado 1. Não esqueça do nosso público alvo Nosso público alvo é formado por estudantes de Ensino Médio na faixa de 16 a 19 anos, pertencentes a uma fase da vida em que geralmente não ganham seu próprio dinheiro, e por isso, o nível de interferência e participação na tomada de decisão dos gastos varia muito, principalmente com o poder aquisitivo, perfil socio-econômico e hábitos culturais da família que integra. Nessa fase da vida escolar, adolescentes ou jovens não têm, geralmente, a mesma liberdade de uma pessoa que ganha o seu próprio salário. Além disso, a adolescência é uma fase em que os humanos costumam ser impulsivos (Giannetti, 2005) e preocupados com sua posição, pertinência e aparência em algum tipo de grupo, o que pode influenciar um consumo além de suas possibilidades financeiras. Consumo desenfreado e muitas vezes desnecessário, por exemplo, a necessidade de troca de celular de seis em seis meses para não ficar “para trás” dos amigos.

Cuidado 2. Cuidado com a expressão consumo compulsivo Gostamos da definição de compra por impulso, apresentada nos estudos de Sharon E. Beatty e M. Elisabeth Ferrell (1998). Para eles, compra por impulso ocorre sem intenções prévias de adquirir algum produto ou de efetuar alguma tarefa de compra, não se constituindo em aquisição de um item lembrado no ambiente de loja.

Cuidado 3. Cuidado com a expressão consumo consciente Essa expressão está super na moda, mas ela tem múltiplos significados, e, em nossa opinião, tem sido, muitas vezes, usada de maneira equivocada.

Vários estudos mostram que não há pensamento sem uma base emocional (Vera Ferreira, 2008). O neurocientista Antônio Damásio descobriu que pessoas com lesão na parte do cérebro dedicadas à emoção não conseguem tomar decisões, ainda que consigam realizar cálculos matemáticos. As emoções surgiram no homem muito antes da razão, e ainda hoje podem ter muito mais poder sobre nós do que o nosso lado lógico e racional, que é mais recente. Por questão de energia, nós só pensamos e mobilizamos o que Daniel Kahneman chama, em seu livro *Rápido e Devagar: duas formas de pensar*, de sistema 2 quando *reconhecemos* que realmente precisamos do raciocínio.

A expressão consumo consciente tem sido usada para sinônimo de consumo racional. Ainda que devamos avaliar opções e fazer cálculos, a emoção está sempre junta, então, consumo racional é algo que, segundo esses pressupostos, não existe. Razão e emoção andam juntas, tanto psicologicamente quanto fisiologicamente.

A expressão consumo consciente também tem sido usada como consumo que leva em consideração suas necessidades, e rejeita as coisas supérfluas. Isso também é um equívoco, pois o que pode ser supérfluo para uma pessoa, pode fazer bem para outra, considerando, é claro, suas possibilidades financeiras.

A expressão consumo consciente também tem sido usada como consumo planejado, pensando em que se avalia de forma fundamentada as opções existentes. Podemos ter consciência do que estamos fazendo, e ao mesmo tempo estamos agindo por impulso, por pressão do grupo, ou por vaidade de forma consciente. Nesse caso, consumo consciente não é sinônimo de consumo planejado.



Então o que é consumo consciente? Não sabemos ainda responder a essa pergunta, pois não encontramos evidências, estudos ou pesquisas que tragam uma caracterização do que seja um consumo consciente, ou ainda de que os humanos consumam de forma consciente, e de que isso seja algo bom para eles. Sendo assim, não usaremos neste livro a expressão consumo consciente.

Usaremos expressões como consumo que busque avaliar opções, que seja fundamentado quando necessário, ou quando seja possível, que seja racional no sentido de avaliar as informações e tentar controlar um consumo compulsivo na perspectiva que apresentamos acima.

Para finalizar, sugerimos a leitura de três livros sobre o tema:

- Solomon, M. R. (2011). *O comportamento do consumidor*. Bookman.
Um livro que é a referência do assunto nos cursos relacionados ao tema no Brasil.
- de Melo Ferreira, V. R. (2011). *Decisões econômicas: você já parou para pensar?* (2ª ed.). Évora.
O livro traz uma análise do ponto de vista da psicologia econômica e de como nós, os seres humanos, tomamos decisões. E as propagandas têm um papel importante na forma como isso acontece. Vale a leitura!
- Kahneman, D. (2012). *Rápido e devagar: Duas formas de pensar*. Objetiva.
O livro é simplesmente fantástico, e pode ser considerado a “bíblia” dos fundamentos da psicologia econômica. Foi a nossa principal referência no tema na elaboração deste livro.



9 CONSUMO, CULTURA E SUSTENTABILIDADE

Para atender às nossas necessidades, quer sejam elas fisiológicas, como sede e fome; quer sejam de natureza estética (ficar mais bonito); formativa educacional (cursos, livros, programas); profissional (especializações, formações); que podem ou não estar relacionadas ao pertencimento de grupo; construção da identidade; nossa mente usa um poderoso agente: o desejo.

Por exemplo, o ato de comprar um sapato pode ser motivado por diferentes necessidades, dentre elas, fazer uma atividade física (tênis de corrida); ir a uma festa (sandália de salto alto ou sapato social); trabalhar em pé com mais conforto (sapato leve com sistema de amortecimento); se proteger do frio com elegância (bota de cano longo). E para cada tipo de necessidade acima a ser satisfeita, tomamos uma série de decisões impulsionadas pelo desejo, sempre mobilizado, quer seja conscientemente ou inconscientemente, até conseguirmos satisfazer a nossa necessidade, quando possível.

As necessidades podem ser induzidas. As necessidades podem ser manipuladas. As necessidades podem ser intencionalmente direcionadas. E os pesquisadores de marketing, psicólogos, antropólogos, dentre outros profissionais, têm estudado e mostrado, nos últimos 50 anos, centenas de estratégias para atender necessidades e influenciar os desejos das pessoas.

Nesta seção convidamos você a pensar em uma série de situações de consumo e sustentabilidade, envolvendo aspectos matemáticos e não matemáticos, dentre eles os culturais, comportamentais e sociais.

Explorando

Consumo, Cultura e Sustentabilidade

Atividade 38

Liberdade e consumo

Letícia está sentindo a necessidade de mudar seu pacote de dados para acesso à internet, e para isso resolveu acessar o site de uma determinada empresa. A figura abaixo apresenta duas opções de plano de dados dessa empresa, assim que se acessa o site.

Analise as informações e responda as questões a seguir.

OFERTA EXCLUSIVA DO SITE	OFERTA EXCLUSIVA DO SITE
13,5GB 4GB + 500 MB na conta digital + 5GB de Bônus por 12 meses *** + 2GB bônus para portabilidade* R\$ 59,99/mês** Com permanência de 12 meses	15,5GB 5GB + 500 MB na conta digital + 5GB de Bônus por 12 meses *** + 2GB bônus para portabilidade* R\$ 74,99/mês** Com permanência de 12 meses
<input type="checkbox"/> Adicione 4GB para suas redes sociais por R\$ 5,00 Exclusivos para as redes sociais: 	<input type="checkbox"/> Adicione 5GB para suas redes sociais por R\$ 5,00 Exclusivos para as redes sociais: 

Objetivos Específicos

Liberdade e consumo

- Investigar situações financeiras envolvendo consumo, comportamento, cultura e sustentabilidade, em especial sobre as heurísticas e vieses presentes nas ações de consumo e suas possíveis consequências
- Resolver problemas relacionados a situações de consumo, comportamento, cultura e sustentabilidade
- Construir propostas e soluções alternativas como apoio para a tomada de decisão em situações de consumo e sustentabilidade, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos, em especial aos aspectos culturais e comportamentais

Sugestões e discussões

Liberdade e consumo

Nessa questão convidamos o aluno a pensar a tomada de decisão considerando não apenas a atratividade financeira, mas também as âncoras presentes na estratégia. Por exemplo, oferecer 1 GB a mais na segunda opção pelos mesmos R\$ 5,00 adicionais para ser uma vantagem. As pessoas se apegam a esse número. A sensação de ganho também gera uma atração pela segunda opção. Mas uma simples razão nos mostra que o custo do GB na segunda opção é maior. Ou seja, se a pessoa se prender (ancorar) sua decisão nesses dados do final da oferta, tomará uma decisão financeira com maior custo. Analisaremos mais detalhadamente essa questão ao longo do texto do aluno, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos.

Solução

Liberdade e consumo

A atividade será resolvida e analisada no próximo tópico organizando as ideias.



Objetivos Específicos

Consumo e comportamento

■ Investigar situações financeiras envolvendo consumo, comportamento, cultura e sustentabilidade, em especial sobre às heurísticas e vieses presentes nas ações de consumo e suas possíveis consequências

■ Resolver problemas relacionados a situações de consumo, comportamento, cultura e sustentabilidade

■ Construir propostas e soluções alternativas como apoio para a tomada de decisão em situações de consumo e sustentabilidade, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos, em especial aos aspectos culturais e comportamentais

Sugestões e discussões

Consumo e comportamento

Nessa atividade convidamos o aluno a pensar a tomada de decisão considerando não apenas a atratividade financeira, mas também as âncoras presentes na estratégia. Segundo Kahneman (2012), o efeito de ancoragem acontece “quando as pessoas consideram um valor particular para uma quantidade desconhecida antes de estimar essa quantidade.” (Kahneman, 2012, p. 152). Assim, a ancoragem acontece quando ficamos marcados por um número, um valor ou uma situação (chamadas âncoras), de modo que as escolhas subsequentes refletem essa influência, ainda que muitas vezes nem nos damos conta disso. Ficamos “presos” a essas âncoras, de modo que tomamos decisões influenciados por elas.

Essa atividade também será analisada ao longo do texto do aluno, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos.

Solução

Consumo e comportamento

A atividade será resolvida e analisada no próximo tópico organizando as ideias.

- O preço é diretamente proporcional à quantidade de dados? Explique por que isso acontece ou não acontece, na sua opinião.
- Qual o plano mais vantajoso na sua opinião?
- O plano mais barato é um chamariz para induzir a compra do plano mais caro? Explique.
- Você reparou que a opção de adicionar 4GB e 5GB já vêm marcadas? Por que elas já vêm marcadas? Você vê algum problema nisso?

Atividade 39

Consumo e comportamento

Joana precisa comprar uma mochila nova, pois a sua rasgou depois de dois anos de uso intenso no dia dia de casa e da escola. Passando pelo corredor de um shopping, avistou uma mochila bem legal, e junto dela o seguinte anúncio:



Olhou, gostou, mas resolveu dar mais uma pesquisada, e para surpresa dela, encontrou a mesma mochila em outra loja, só que com um anúncio um pouco diferente.



- Em qual das lojas você compraria? Usando qual condição de pagamento?
- Quais as principais diferenças entre as formas de se apresentar o preço aos clientes?
- De que maneira essas formas influenciam o comportamento do consumidor?



Consumo e proteção de longo prazo

Considere que, em um determinado país, você possa escolher se quer contribuir para a Previdência Social ou não a cada contrato de trabalho que assina.

Vamos supor que o Ministério da Economia desse país esteja analisando qual a melhor forma de fazer essa pergunta, de modo a ampliar o nível de proteção do trabalhador.

- a) Qual das duas perguntas abaixo você avalia como sendo mais pertinente para o objetivo apresentado?

I - Você deseja retirar 14 % do seu salário todo mês para contribuir para o INSS?

- Sim.
 Não.

II - Você deseja não ser descontado todo mês para contribuir para o INSS?

- Sim.
 Não.

- b) Considerando as duas novas perguntas a seguir, qual delas você avalia como sendo mais pertinente para o objetivo apresentado?

I - Você quer ser protegido pelo INSS em caso de acidente e ter uma aposentadoria no futuro, pagando, para isso, 14 % do seu salário todo mês para contribuir para o INSS?

- Sim.
 Não.

II - Você quer cuidar da sua própria proteção e aposentadoria no futuro, ficando por sua conta e risco a gestão desses recursos, optando por não descontar 14 % do seu salário todo mês para contribuir para o INSS?

- Sim.
 Não.

- c) Compare as duas duplas de perguntas e apresente diferenças e semelhanças entre elas.
- d) Se você estivesse trabalhando hoje e tivesse que escolher, qual seria a sua decisão: contribuir para o INSS ou cuidar da sua própria aposentadoria e proteção?

Objetivos Específicos

Consumo e proteção de longo prazo

- Investigar situações financeiras envolvendo consumo, comportamento e proteção.
- Construir propostas e soluções alternativas como apoio para a tomada de decisão em situações de consumo e sustentabilidade, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos, em especial aos aspectos culturais e comportamentais

Sugestões e discussões

Consumo e proteção de longo prazo

Nessa atividade convidamos o aluno a pensar sobre possíveis efeitos da reforma da previdência, em especial a tendência de transferir do Estado para as pessoas a responsabilidade de sua proteção do futuro, permitindo que escolham por níveis perigosos de liberdade de escolha sobre suas contribuições previdenciárias.

Trazemos também uma discussão sobre como a forma na qual o problema é formulado pode mudar a opinião de uma boa parte das pessoas, ainda que tenhamos opções logicamente idênticas. O efeito do enquadramento, de Daniel Kahneman e Amos Tversky nos ajudam a entender esse processo de escolha.

Essa atividade também será analisada ao longo do texto do aluno, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos.

Solução

Consumo e proteção de longo prazo

A atividade será resolvida e analisada no próximo tópico organizando as ideias.



Para analisar a primeira situação, envolvendo a escolha do pacote de dados que melhor nos atende ou que mais se adequa ao seu orçamento, as pessoas podem levar em consideração, tendo ou não consciência disso, tanto alguns **aspectos matemáticos**, dentre eles o preço; o volume de dados; as suas condições financeiras; incluindo o orçamento pessoal e/ou familiar; o quanto de dinheiro tem disponível para gastar com esse serviço, como alguns **aspectos não matemáticos**, tais como a qualidade do serviço da empresa; a opinião dos amigos que são clientes; a estabilidade do sinal para assistir aos vídeos que gosta; a área de cobertura; o status que ser cliente dessa empresa pode te dar; o quanto acha que o serviço vale (avaliação subjetiva de valor), dentre outros.

Quanto aos aspectos não matemáticos, estão os componentes envolvendo heurísticas e vieses. Mas o que são heurísticas e vieses?

Segundo os psicólogos Daniel Kahnem e Amos Tversky, e a partir deles, outros pesquisadores, seres humanos, ao tomar decisões das mais variadas e fazerem julgamentos sob incerteza, costumam utilizar alguns atalhos mentais denominados heurísticas (procedimentos ou estratégias simplificadas que ajudam a encontrar respostas adequadas, ainda que geralmente imperfeitas, para perguntas difíceis) e tendências (vieses), que levam os indivíduos a se desviarem das decisões que seriam as tomadas segundo um processo exclusivamente racional, ou seja, baseado exclusivamente na compreensão e utilização de toda informação disponível e orientado à otimização dos resultados financeiros.

Respondendo à [Atividade 38](#), na primeira pergunta vemos que o preço não é diretamente proporcional, pois a razão entre os preços não é igual à razão entre os volumes de dados.

$$\frac{15,5}{13,5} \approx 1,148$$

$$\frac{74,99}{59,99} \approx 1,250$$

OFERTA EXCLUSIVA DO SITE	OFERTA EXCLUSIVA DO SITE
<p>13,5GB</p> <p>4GB + 500 MB na conta digital + 5GB de Bônus por 12 meses ***</p> <p>+ 2GB bônus para portabilidade*</p> <p>R\$ 59,99/mês** Com permanência de 12 meses</p> <p>Assine já</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Adicione 4GB para suas redes sociais por R\$ 5,00 Exclusivos para as redes sociais:</p> <p></p>	<p>15,5GB</p> <p>5GB + 500 MB na conta digital + 5GB de Bônus por 12 meses ***</p> <p>+ 2GB bônus para portabilidade*</p> <p>R\$ 74,99/mês** Com permanência de 12 meses</p> <p>Assine já</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Adicione 5GB para suas redes sociais por R\$ 5,00 Exclusivos para as redes sociais:</p> <p></p>

Isso significa que o pacote mais desvantajoso do ponto de vista do custo, pois ele é aproximadamente 15 % maior, mas custa 25 % mais caro.

Outra forma de ver isso é obter o custo, em reais, de GB em cada um dos planos. Fazendo isso, obtemos os seguinte valores:

$$\frac{59,99}{13,5} \approx 4,44 \text{ reais/GB}$$

$$\frac{74,99}{15,5} \approx 4,84 \text{ reais/GB}$$



A resposta à segunda pergunta é pessoal, mas se olharmos do ponto de vista exclusivamente financeiro, o primeiro plano é mais vantajoso.

Para continuarmos nossa análise, precisamos recorrer a alguns estudos da Psicologia, em especial de uma área chamada de Psicologia Econômica, para entender a ancoragem. Mas o que é ancoragem, e o que isso tem a ver com a escolha do meu pacote de dados para navegar na internet?

Segundo Kahneman (2012, p. 152), o efeito de ancoragem acontece quando as pessoas consideram um valor particular para uma quantidade desconhecida antes de estimar essa quantidade. Assim, a ancoragem acontece quando ficamos marcados por um número, um valor ou uma situação (chamadas âncoras), de modo que as escolhas subsequentes refletem essa influência, ainda que muitas vezes nem nos damos conta disso, ficamos “presos” a essas âncoras, de modo que tomamos decisões influenciados por elas.

Voltando para a [Atividade 38](#), nessa oferta, o plano mais barato não nos parece uma âncora, porque ele não induz a compra do mais caro de forma explícita.

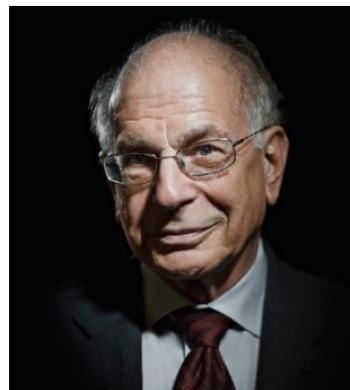


Figura 27: Daniel Kahneman

Entretanto, o pacote adicional de 5 GB que vem lá no final é explicitamente uma âncora, na medida que a pessoa toma como referência que 4 GB adicionais custaria R\$ 5,00, e usa essa informação na segunda opção, pensando que está levando vantagem pagando o mesmo preço por 5 GB.

Na última pergunta, a opção já vir marcada, permite que as pessoas a desmarquem caso queiram, mas aumenta a chance da pessoa que não prestou atenção, e gastar mais com isso. O nosso cérebro, segundo Daniel Kahneman, tende a usar o sistema 1, que é rápido, simplificador e não muito analítico para fazer escolhas. Nesse caso, desmarcar a opção exige uma reflexão maior, e portanto, é uma ação que tende a depender do sistema 2, que é mais elaborado, analítico, porém mais preguiçoso. Nos estudos de Kahneman e Robert Schiler, se essa opção viesse desmarcada, a maioria das pessoas tenderia a não marcar. Se vier marcada, as pessoas tenderiam a não desmarcar. Nos dois casos, teríamos, em tese, a mesma liberdade de escolha. Mas na prática, dado a tendência do comportamento humano de simplificar problemas e usar o sistema 1, as pessoas tendem a manter a situação inicial.



Para refletir

Será que a estratégia de venda foi pensada considerando essa nossa tendência de pensar?

Agora vamos investigar e refletir sobre a [Atividade 39](#). Nessa situação financeira, a mochila custa R\$ 300,00 à vista nas duas lojas. Então, olhando apenas para o aspecto preço à vista, comprar na loja A ou na loja B não importa, ou seja, as opções são equivalentes. Entretanto, segundo os estudos sobre ancoragem, as pessoas tendem a achar que a forma de pagamento na loja B é mais vantajosa, pois o tamanho da letra faz do valor 80,00 reais ser mais atrativo que o valor de 300,00 reais. Nesse caso, algumas pessoas optam por pagar juros influenciadas pelas âncoras e não por outra situação, tal como não ter condições de pagar os 300,00 reais à vista. Mas mesmo assim, por que não comprar na loja A em quatro parcelas de 75,00 reais?

Outra âncora é anunciar os 300,00 reais como sendo um valor com desconto, uma vez que o parcelamento tem juros embutidos (4 parcelas de 80,00 reais). A pessoa que escolhe esse parcelamento, mesmo sabendo que pode pagar 4 parcelas de 75,00 reais na outra loja, pode estar sendo influenciada por essa âncora, juntamente com o viés de aversão à perda, ou seja, como nossa mente foge das opções que apresentam perdas, e na segunda opção, como há um



desconto (ainda que você não pague à vista), a sensação de ganho marca aquela opção como mais favorável. É claro que a escolha pela loja *B* pode ser devido ao excelente atendimento do vendedor; à estética interna da loja, às pessoas que estavam lá nesse momento; à quantidade de compradores; a uma conversa influenciadora no momento da compra; ao cheiro da loja; à disposição dos produtos na vitrine, dentre outras.

Os profissionais de *visual merchandising* vão dizer que na segunda opção a loja apenas apresentou uma estratégia para chamar a atenção do cliente, e que em momento algum o cliente está sendo enganado, pois todas as informações estão disponíveis.



Para refletir

Você acha ético e correto a estratégia usada na loja *B*?

Conclusão: cuidado com letras muito grandes ou muito pequenas. As letras muito grandes podem chamar sua atenção para algo que pode não ser o melhor para você no momento. As letras muito pequenas podem esconder uma informação que é justamente a mais importante para tomar uma melhor decisão para você neste momento.

Compartilhamos das ideias de Cristiane Azevedo dos Santos Pessoa et al. (2018) quando dizem que o estudo do comportamento humano por pesquisadores dessa área denominada Psicologia Econômica, aqui recortado e utilizado de forma bem simples, é de fundamental importância para uma Educação Financeira Escolar que, de fato, trate as decisões humanas como elas costumam ser, ou seja, caracterizadas por processos complexos, repletos de atalhos mentais, ora baseadas na consciência, ora não, que se misturam com processos analíticos e deliberados, em que os aspectos matemáticos são levados em consideração.

Obviamente, entender o efeito de ancoragem não deve gerar uma paranoia ou neurose de avaliar todas as situações detalhadamente, avaliando se estamos sob efeito da ancoragem ou não. Não é para viver uma vida chata, até mesmo porque não somos analíticos o tempo todo, e na maior parte do tempo nossas decisões consideram mais nossas emoções do que a razão. Sem contar que as emoções, estabelecem uma ponte entre os processos racionais e os não racionais, entre as estruturas corticais (mais novas do cérebro) e as subcorticais (mais antigas), segundo o neurocientista A.R. Damásio (2012, p.127).



Atividade 41

Desconto progressivo: oportunidade ou enganação ancorada?

Uma loja oferece descontos progressivos na peça de menor preço para compras de produtos nas respectivas quantidades descritas.



- Qual é o percentual de desconto total e máximo na compra de duas peças?
- Qual é o percentual de desconto total máximo na compra de cinco peças?
- O que você pensa a respeito desse desconto progressivo sobre a peça de menor valor?
- E se o desconto fosse progressivo sob o total da compra, você manteria a mesma opinião dada no item c.

Atividade 42

Indenizações e ancoragem

Considere que sua família foi obrigada a mover uma ação no Juizado Especial Cível (entraram na Justiça) contra uma operadora de telefonia que cobrou durante meses por um serviço que não foi prestado. Vocês tentaram muitas vezes resolver o problema sem ação judicial, mas foi tudo em vão. Você tem conhecimento de que um amigo da família passou por uma situação muito semelhante, quase igual a sua, e no caso desse amigo o juiz deliberou uma indenização de R\$ 5.000,00. Você chega à audiência e os advogados da empresa de telefonia lhe oferecem R\$ 1.000,00 para encerrar o caso. Você aceitaria a proposta? Você achou justo o valor que eles propuseram? Por que tão baixo?

Objetivos Específicos

Desconto progressivo: oportunidade ou enganação ancorada?

- Investigar situações financeiras envolvendo consumo, comportamento e proteção.
- Resolver problemas relacionados a estratégias de marketing e propagandas em situações de consumo
- Construir propostas e soluções alternativas como apoio para a tomada de decisão em situações de consumo e sustentabilidade, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos, em especial aos aspectos culturais e comportamentais

Nota 23

Objetivos Específicos

Indenizações e ancoragem

- Investigar situações financeiras envolvendo consumo, comportamento e proteção.
- Resolver problemas relacionados a estratégias de marketing e propagandas em situações de consumo
- Construir propostas e soluções alternativas como apoio para a tomada de decisão em situações de consumo e sustentabilidade, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos, em especial aos aspectos culturais e comportamentais.

Solução

Indenizações e ancoragem

A resposta é pessoal

Nota 24



CONSIDERAÇÕES PARA O FUTURO

Encerramos aqui o módulo de Educação Financeira do Livro Aberto de Matemática. Muitas outras coisas poderiam ser ditas sobre consumo e também sobre renda e trabalho, planejamento, orçamento e gestão financeira, sobre juros, crédito, financiamentos e investimentos, sobre tributação e futuro, sobre consumo, sustentabilidade e previdência. Tudo isso por que você, como ser vivo e principalmente como humano, tem necessidades variadas e intensas em diversos níveis, e para avaliar e satisfazê-las, mobiliza o desejo, de forma consciente ou inconsciente, que o impulsiona a tomar decisões, fazer julgamentos e a resolver problemas, muitas vezes bem complexos.

Tentamos mostrar que a EF para a Escola é especial em diversos aspectos. Ela articula aspectos matemáticos com aspectos não matemáticos, dentre eles os econômicos, financeiros, comportamentais, culturais e sociais. Ela fala de comportamento. De emoções. De sonhos. Ela trata de situações reais e de muitos problemas reais ou parecidos com a realidade. Essa EF pode te ajudar a entender desde questões econômico-financeiras bem pessoais, do dia a dia, tais como a forma como seus pais ganham dinheiro, de como vocês moram e vivem, do lazer, dos projetos, do valor da educação, até questões mais gerais sobre sustentabilidade, futuro do planeta, carga tributárias, inflação, reforma da previdência, empreendedorismo, novos negócios, desemprego e investimentos.

Nossa Educação Financeira convidou você a pensar no micro, no agora, e no macro, no futuro. Ela buscou levar em consideração o seu entorno, sua realidade, seu bairro e sua cidade. Mas ela também deve olhar para outros ambientes, talvez aqueles nos quais você vai viver daqui a 10 anos, te convidando a pensar o Brasil e o mundo com mais riqueza e melhor distribuição de renda, e te ajudando a ter atitudes que contribuam para que isso aconteça.

Tentamos te mostrar uma Educação Financeira que fala do presente mas aponta o tempo todo para o futuro. Muitas trocas intertemporais foram discutidas e analisadas. O futuro chega rápido. Prepara-se para ele, sempre!

Esperamos que os Ambientes de Educação Financeira disparados e inspirados a partir deste texto lhe inspire a articular aspectos matemáticos com aspectos não matemáticos na análise e na tomada de decisão de SEF, assim como buscamos articular o que se aprende em Matemática, na Educação Básica, com os conhecimentos de outras áreas tais como Economia, Geografia, Filosofia, Psicologia, Antropologia, Biologia, dentre outras.

Esperamos que nossa conversa tenha sido proveitosa e com muito aprendizado. Que ela te ajude a ser livre. Conquiste de forma ética e sustentável tudo aquilo que fizer bem para você e para a sociedade. Rumo ao futuro.



Objetivos Específicos

Exercício 1

■ Identificar diferentes fatores que influenciam o valor do dinheiro no tempo, tais como juros, inflação, câmbio, investimentos e percepção de utilidade.

■ Resolver problemas relacionados a juros simples ou compostos

■ Analisar e tomar decisões em situações econômico financeiras que envolvam o valor do dinheiro no tempo, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos.

Objetivos Específicos

Exercício 2

■ Investigar situações financeiras que envolvem o valor do dinheiro no tempo, considerando o conceito de capitais equivalentes

■ Resolver problemas relacionados aos capitais equivalentes.

■ Analisar e tomar decisões em situações econômico financeiras que envolvam o valor do dinheiro no tempo, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos, **em especial às envolvendo o custo do crédito e sua facilidade de acesso.**

1. Leia atentamente os dados e manchetes a seguir.

Após 5 meses de ingresso de recursos, poupança perde R\$ 2,00 bilhões em outubro.

Dados foram divulgados pelo Banco Central nesta terça-feira. No acumulado de janeiro a outubro, saques da poupança superaram depósitos em R\$ 6,16 bilhões. (Alexandro Martello, 2017).

Tesouro Direto supera 1,5 milhão de investidores cadastrados em julho.

As emissões de novos títulos pelo Tesouro Direto somaram \$ 1,37 bilhão no mês passado, enquanto os resgates chegaram a R\$ 1,06 bilhão. (Redação do G1, 2017)

	Set	Out	Nov
Poupança (%)	0,50	0,47	0,43
Tesouro Pré-fixado 2023 (LTN) já descontado IR e taxas (%)	0,80	0,70	0,60

Dados do Banco Central

Agora, a partir desses dados, vamos analisar e comparar diferentes modalidades de investimento. Para isso, responda às perguntas a seguir sendo bem honesto e sincero.

- a) Se você tivesse R\$ 10.000,00 aplicados na poupança em agosto de 2017, você mudaria para o Tesouro pré-fixado 2023, considerando as taxas apresentadas? Por quê?
 - b) Se você aplicasse, no último dia de agosto, R\$ 10.000,00 na poupança e R\$ 10.000,00 no outro investimento, qual seria a diferença em reais imediatamente após as três rentabilidades?
 - c) Por que você acha que as pessoas deixam o dinheiro aplicado na poupança? Há vantagens para as pessoas? E para o país?
 - d) Considere que uma pessoa da família pediu R\$ 5.000,00 emprestado para você, e você só tem disponível o dinheiro aplicado na poupança. O que você faria? E se o dinheiro estivesse aplicado no Tesouro?
 - e) Considere agora que uma pessoa lhe peça o dinheiro emprestado para você com o objetivo de comprar mercadorias para revender. O que você faria?
2. Você precisa pagar o material didático que usará durante todo o ano letivo. O valor é de R\$ 1.000,00, e pode ser pago à vista com 10 % de desconto ou parcelado em até cinco vezes sem juros, no cartão ou no boleto bancário.
 - a) Qual a opção você escolheria, se as duas opções fossem possíveis para você?
 - b) Se porventura você não pudesse pagar à vista, mas pudesse pegar dinheiro emprestado com alguém, qual seria a taxa máxima de juro que você aceitaria pagar?



3. Analise as informações presentes na figura abaixo.

Tabela 24: Conversão de moedas

Moeda	Valor de conversão de R\$1000
Dólar (USD)	240,4945
Euro (EUR)	219,2502

Dados do Banco Central. Acesso em 02/09/2019

- Como a variação cambial pode interferir na vida das pessoas de baixa renda?
 - Qual a sua percepção do efeito da variação cambial na sua vida? Você teria exemplos a dar? Se tiver, apresente pelo menos dois deles.
4. Se a sua renda sofre um aumento de 20 % em função de uma promoção, mas os preços dos produtos que você consome sobem, em média, 10 % (pois o dólar se valoriza ante o real, por exemplo), qual foi o aumento percentual do seu poder de compra?



5. Você compra um celular por R\$ 1.500,00 em dezembro de 2018, e após um ano, ela apresenta um defeito, cujo conserto está estimado em 300,00 reais. Você também pode trocar seu celular usado por um modelo novo parecido com o seu, pagando 900,00 reais. Qual a decisão que você tomaria? Qual o principal aspecto você levaria em consideração para tomar essa decisão? Quais os aspectos matemáticos você levaria em consideração para tomar essa decisão? Quais aspectos ambientais você costuma levar em consideração para tomar essa decisão?
6. O Etanol é conhecido por causar menor impacto ambiental que a Gasolina. Entretanto, por questões de eficiência, o Etanol só é vantajoso financeiramente se seu preço corresponder a até 70 % do preço da gasolina, como acontece na tabela abaixo:
- Gasolina: 4,00 reais/L
 - Etanol: 2,80 reais/L
- Sabendo disso, responda:
- Se o preço do Etanol fosse 2,80 reais/L, qual seria sua escolha? E se fosse 3,00 reais/L?
 - Até quanto você estaria disposto a pagar pelo Etanol em prol do meio ambiente?
7. Você tem dinheiro aplicado na poupança, e pretende comprar um produto com esse dinheiro. Indo a loja, tem duas opções:
- Comprar à vista com 5 % de desconto
 - Ou a prazo, no cartão em 12 vezes sem juros

Objetivos Específicos

Exercício 3

- Identificar diferentes fatores que influenciam o valor do dinheiro no tempo, tais como juros, inflação, câmbio, investimentos e percepção de utilidade.
- Investigar situações financeiras que envolvem o valor do dinheiro no tempo, considerando o efeito do câmbio

Objetivos Específicos

Exercício 4

- Investigar situações financeiras que envolvem a noção de inflação e possíveis impactos na vida da população
- Resolver problemas relacionados às noções de inflação e poder de compra

Objetivos Específicos

Exercício 5

- Resolver problemas relacionados a situações de consumo, comportamento, cultura e sustentabilidade
- Construir propostas e soluções alternativas como apoio para a tomada de decisão em situações de consumo e sustentabilidade, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos, em especial aos aspectos culturais e comportamentais.

Objetivos Específicos

Exercício 6

- Resolver problemas relacionados a situações de consumo, comportamento, cultura e sustentabilidade
- Construir propostas e soluções alternativas como apoio para a tomada de decisão em situações de consumo e sustentabilidade, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos, em especial aos aspectos culturais e comportamentais

Objetivos Específicos

Exercício 7

- Investigar situações financeiras que envolvem o valor do dinheiro no tempo,



considerando o conceito de capitais equivalentes

■ Resolver problemas relacionados aos capitais equivalentes, para obtenção de taxas de juros embutidas.

Objetivos Específicos

Exercício 8

■ Investigar situações financeiras que envolvem o valor do dinheiro no tempo, considerando as Séries Uniformes

■ Resolver problemas relacionados às Séries Uniformes.

■ Analisar como o valor futuro da série é sensível ao tempo de aplicação, por meio de algumas simulações (uma introdução à análise de sensibilidade)

Objetivos Específicos

Exercício 9

■ Investigar situações financeiras envolvendo consumo, comportamento e endividamento.

■ Construir propostas e soluções alternativas como apoio para a tomada de decisão em situações de consumo e renda, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos, em especial aos aspectos financeiros, culturais e comportamentais.

Objetivos Específicos

Exercício 10

■ Investigar situações financeiras que envolvem o valor do dinheiro no tempo, considerando as Séries Uniformes

■ Resolver problemas relacionados às Séries Uniformes.

■ Construir propostas e soluções alternativas como apoio para a tomada de decisão em situações de consumo.

a) Qual opção você escolheria?

b) Qual a opção mais vantajosa do ponto de vista exclusivamente financeiro? Por quê?

8. Sr. Augusto montou a estratégia financeira de investir 30% de seu décimo terceiro salário, durante 5 anos, sempre no início de janeiro de cada ano. O primeiro investimento foi em janeiro de 2020 e o último será em janeiro de 2024. Considere que Augusto ganhava R\$ 10.000,00 em dezembro de 2019 (valor base para o 13º salário que será investido em janeiro de 2020), e que seu salário aumente de 5% ao ano, sempre em abril de cada ano, na comparação com o ano anterior, durante esse período. Considere que não houve resgates nessas aplicações durante esse tempo, e que o investimento renda juros de 10% ao ano, na comparação com o ano anterior (juros compostos).

Se a estratégia for efetivamente posta em prática, e as premissas mantidas, qual será o valor futuro (montante) dessa operação, em janeiro de 2025?

9. Olhando para a população brasileira, existem dois perfis de endividamento:

Perfil 1 – Possui renda familiar incerta

Perfil 2 – Possui renda familiar certa, mas sofre uma redução brusca

a) Na sua opinião, qual dos dois está mais propenso a adquirir dívidas? Por que?

b) O que você faria em cada uma das situações?

10. Leia atentamente as informações apresentadas no seguinte anúncio:



Smartphone Gigante da Colina 5G Preto 256GB, Tela 6.6\", 8GB RAM, IP68, Processador Dinamite 2, Câmera Tripla Traseira + Selfie de 12MP

~~R\$ 6.999,00~~

R\$ 5.578,97 -20%

Comprar

7% de desconto Exclusivo Pix

R\$ 5.998,89
ou até 10x de R\$ 599,89 sem juros no Cartão de Crédito

R\$ 5.578,97 - 7% de desconto
Exclusivo Pix

R\$ 5.998,89
à vista no Cartão Casas Bahia ou 12x de R\$ 499,91 sem juros

a) Qual forma de pagamento você escolheria dentre as apresentadas? Justifique sua resposta.

b) Quais âncoras você identifica nesse anúncio? Elas são prejudiciais para você? Justifique.

c) De que maneira elas podem te influenciar na compra?

d) Qual forma de pagamento você escolheria dentre as apresentadas? Justifique sua resposta



11. Compare as opções apresentadas no **Cenário A** com as apresentadas no **Cenário B**.

Cenário A:

Opção I – R\$ 900,00 à vista.

Opção II – Em 2 vezes com juros (2 × 500,00 reais).

Qual das duas opções você escolheria? Justifique.

Cenário B:

Opção I – R\$ 1.000,00 com desconto de 10 % para pagamento à vista.

Opção II – Em 2 vezes sem juros (2 × 500,00 reais).

Qual das duas opções você escolheria? Justifique

12. Em uma determinada lanchonete, um pacote de batata frita pequeno (35 g) custa R\$ 3,50, e o pacote grande (70 g) custa R\$ 4,50.

- Qual deles você escolheria? Por que?
- Se o preço fosse proporcional à quantidade em gramas da embalagem, quanto deveria custar o pacote grande? De que forma você acredita que essa informação influencia nossas escolhas?
- Como você percebe a situação? Como o preço do pacote pequeno sendo o preço justo e o grande uma promoção ou como o preço do grande sendo o preço justo e do pequeno um prejuízo?
- Você já observou alguma situação similar e optou pela opção mais cara?
- Compare essa situação com a apresentada no vídeo a seguir: https://www.youtube.com/watch?v=osML6bkt_C0

13. Considere que uma academia ofereça os seguintes planos para o pacote musculação mais uma atividade extra:

Plano Light: Até duas vezes por semana — R\$ 100,00 mensais no final do mês.

Plano Plus: Até três vezes por semana — R\$ 120,00 mensais no final do mês.

Plano Freedom: Aula avulsa por R\$ 20,00 por cada vez que frequenta (debitados ao final do mês no cartão).



Objetivos Específicos

Exercícios 11 a 13

- Investigar situações financeiras envolvendo consumo, comportamento, cultura e sustentabilidade, em especial sobre as heurísticas e vieses presentes nas ações de consumo e suas possíveis consequências

Objetivos Específicos

Exercício 14

■ Identificar diferentes fatores que influenciam o valor do dinheiro no tempo, tais como juros, inflação, câmbio, investimentos e percepção de utilidade.

■ Resolver problemas relacionados a juros simples ou compostos

■ Analisar e tomar decisões em situações econômico financeiras que envolvam o valor do dinheiro no tempo, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos.

Objetivos Específicos

Exercício 15

■ Investigar situações financeiras que envolvem o valor do dinheiro no tempo, considerando o conceito de capitais equivalentes

■ Resolver problemas relacionados aos capitais equivalentes, para obtenção de taxas de juros embutidas.

Objetivos Específicos

Exercícios 16 e 17

■ Investigar situações financeiras que envolvem o valor do dinheiro no tempo, considerando o conceito de capitais equivalentes e juros compostos.

■ Resolver problemas relacionados aos capitais equivalentes, em especial às séries uniformes.

■ Analisar e tomar decisões em situações econômico financeiras que envolvam o conceito de capitais equivalentes, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos

- Qual plano você escolheria no momento atual de sua vida? Justifique sua resposta.
- Existem âncoras nessa estratégia de preços que poderia te influenciar na tomada de decisão? Explique como.

14. Na figura a seguir, temos os valores da dívida de uma pessoa que usou R\$ 1.000,00 no crédito rotativo do cartão de crédito.



	Set	Out	Nov
Poupança (%)	0,50	0,47	0,43

- Qual a diferença, em reais, após 1 ano, de uma pessoa que investe R\$ 10.000,00 na poupança e de uma que fica devendo R\$ 10.000,00 por um ano no crédito rotativo?
- Qual a sua percepção de justiça sobre essa diferença? O que você faria para se proteger dessa situação?
- Se uma pessoa tem R\$ 5.000,00 na poupança (veja os dados do [item a](#)), e tem uma fatura para pagar no valor de R\$ 2.000,00, mas não tem dinheiro para isso, qual seria a melhor estratégia do ponto de vista financeiro para ela resolver o problema? Justifique sua resposta.

15. Você tem duas opções de pagamento de um determinado produto, cujo preço inicial anunciado é de R\$ 1.000,00

Opção I – Pagar à vista por R\$ 900,00.

Opção II – Pagar a prazo em duas de R\$ 500,00 (0+2).

Sobre isso, responda:

- Há cobrança de juros no financiamento apresentado na [Opção I](#) em relação à [Opção II](#)? Justifique.
 - Determine a taxa de juros embutida no financiamento em duas parcelas, na comparação com o valor à vista.
16. Você deseja comprar um computador novo que custa R\$ 2.000,00. Existem duas opções para você comprá-lo: ou você parcela em dez vezes sem juros (0+10) ou você pagar à vista, com 5% de desconto. Considere que seu dinheiro renda, aproximadamente, 1% ao mês. Use a simulação na [Tabela 25](#), caso queira.

- Qual seria a opção mais vantajosa do ponto de vista exclusivamente financeiro?
- Qual das opções você escolheria: pagar à vista e ficar livre de parcelas, ou parcelar para não gastar tanto dinheiro de uma vez?



Tabela 25: Simulação do parcelamento do computador.

Mês	Valor aplicado (R\$)	Valor pago (R\$)	Saldo (R\$)
0	2.000,00	—	2.000,00
1	2.020,00	200,00	1.820,00
2	1.838,20	201,00	1.637,20
3	1.653,57	202,00	1.451,57
4	1.466,09	203,00	1.263,09
5	1.275,72	204,00	1.071,72
6	1.082,44	205,00	877,44
7	886,21	206,00	680,21
8	687,01	207,00	480,01
9	484,81	208,00	276,81
10	279,58	209,00	70,58

17. Você tem R\$ 2.000,00 e quer comprar um telefone novo, no valor de R\$ 900,00. Você ganhará R\$ 900,00 por mês a partir do mês que vem. Você tem uma dívida de R\$ 1.900,00 no cartão e se não pagar neste mês, essa dívida cairá no cartão de crédito rotativo, com juros de aproximadamente 12% ao mês. O valor mínimo para pagar é de até 285,00 reais, ou seja, você pode pagar o mínimo do cartão, comprar o seu telefone e ainda sobrar um dinheiro para o mês, mas você ainda terá a dívida para o mês que vem.

- O que você faria nessa situação
- Se você optasse por pagar o mínimo nesse mês, qual é o valor da sua dívida após um mês?
- Você conseguirá pagar toda a dívida após um mês?
- Qual é a sua análise sobre o valor mínimo cobrado dos cartões de crédito? Pode-se dizer que é uma emboscada financeira?

18. Você tem R\$ 100 mil para investir. Você está avaliando se investi na poupança, que rende 8% ao ano, ou em CDB prefixado. Após a pesquisa, você identifica várias opções, selecionando duas delas: banco A oferecendo uma taxa prefixada de 12% ao ano, e o banco B de 10% ao ano. Sendo que a poupança não é descontada pelo imposto de renda. Sabendo que a alíquota do imposto de renda para um ano incide sobre o rendimento das aplicações em 17,5%, qual é o rendimento de cada um desses investimentos para daqui a um ano? Qual é a melhor opção do ponto de vista exclusivamente financeiro? Qual a opção que na sua opinião a maioria das pessoas escolheria? Por quê?

Objetivos Específicos

Exercício 18

- Investigar situações financeiras que envolvam o valor do dinheiro no tempo, considerando taxas proporcionais ou equivalentes
- Resolver problemas relacionados às taxas proporcionais ou equivalentes, incluindo os envolvendo tributação sobre a rentabilidade dos investimentos.
- Analisar e tomar decisões em situações econômico financeiras que envolvam o conceito de capitais equivalentes, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos.



Objetivos Específicos

Exercício 19

- Investigar situações financeiras que envolvem o valor do dinheiro no tempo, considerando as Séries Uniformes
- Resolver problemas relacionados às Séries Uniformes.
- Analisar como o valor futuro da série é sensível ao tempo de aplicação, por meio de algumas simulações (uma introdução à análise de sensibilidade)
- Analisar e tomar decisões em situações econômico financeiras que envolvam o conceito de séries uniformes, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos.

Objetivos Específicos

Exercício 20

- Investigar situações financeiras envolvendo consumo, comportamento, cultura e sustentabilidade, levando em consideração o nível sócio econômico dos atores envolvidos

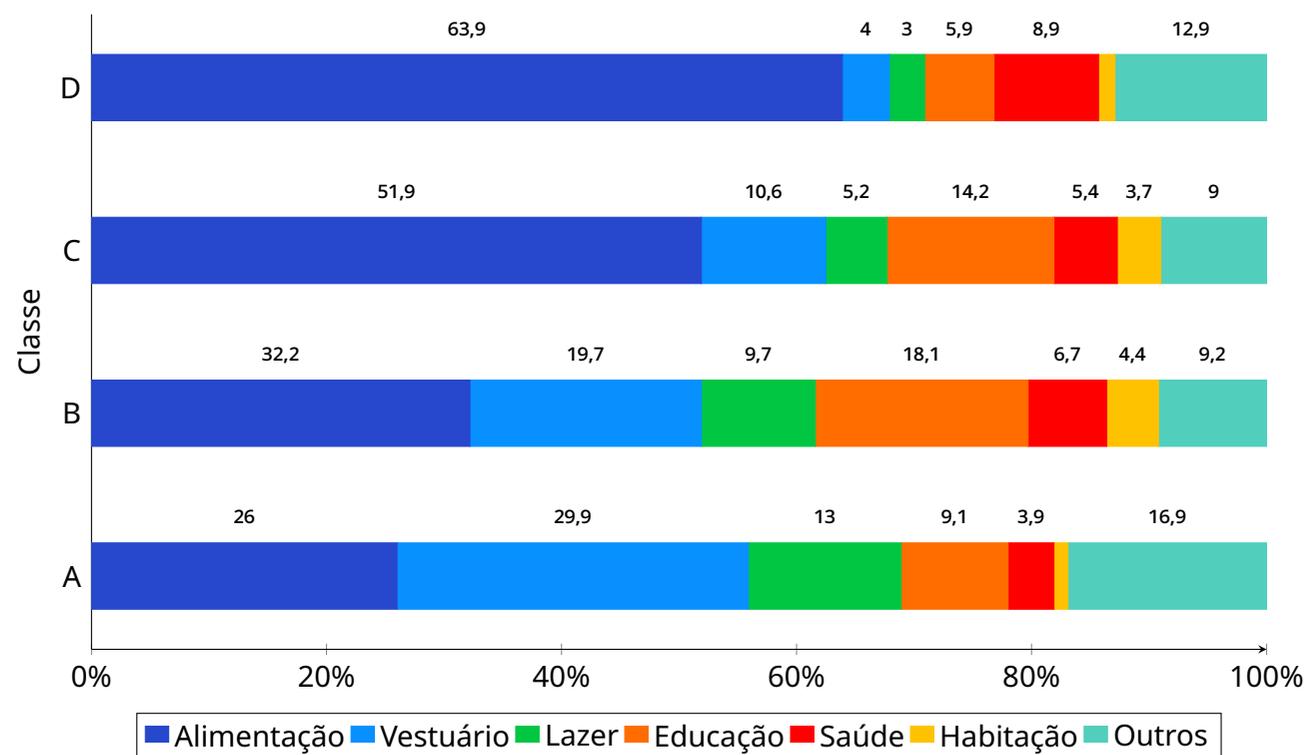
Objetivos Específicos

Exercício 21

- Investigar situações financeiras envolvendo noções tributos e contribuições, suas finalidades e consequências das boas aplicações em áreas estratégicas para o país.
- Resolver problemas relacionados a tributação e contribuições.
- Construir propostas e soluções alternativas como apoio para a tomada de decisão em situações envolvendo tributos e contribuições.

19. Thales e Lucas decidiram começar uma poupança em janeiro de 2018. Thales depositará R\$ 1.000,00 todo mês durante 20 anos. Lucas depositará R\$ 2.000,00 todo mês durante 10 anos, e depois só deixará o dinheiro render, sem depositar mais nada. Considere uma taxa de retorno de 0,5 % ao mês, no regime de juros compostos. Ao final dos 20 anos quem terá mais dinheiro? Quantos reais a mais?
20. Analise o gráfico abaixo, e produza um comentário de até 10 linhas sobre o que você interpretou e analisou com as informações do gráfico.

Figura 28: Aumento de 5 % na renda decorrente da redução tributária. Dentre os que afirmaram que consumiriam, em que seria o consumo:



Adaptado de dados do Sistema FIRJAN.

21. Essa atividade será no smartphone ou no computador. Acesse: <http://www.receita.fazenda.gov.br/Aplicacoes/ATRJO/Simulador/simulador.asp?tipoSimulador=M>

Usando o simulador do IR da Receita Federal, simule o Imposto de Renda para diferentes famílias, buscando estabelecer padrões que te ajudem a entender o impacto das seguintes variáveis no IR:

Simulação 1: relação entre o valor do IR e o número de dependentes.

Simulação 2: relação entre o valor do IR e o valor pago pela previdência oficial.

Simulação 3: relação entre o valor do IR e o valor pago com despesas médicas.

Ao final, explique:

- a) O que é alíquota efetiva?
- b) Como se calcula?
- c) Qual a importância da alíquota efetiva na vida financeira das pessoas?



1. Rendimentos tributáveis		0,00	
2. Deduções			
2.1 Previdência Oficial		0,00	
2.2 Dependente (quantidade) <input type="text"/>		0,00	
O valor da dedução é R\$ 189,59 mensais, por dependente.			
2.3 Pensão alimentícia		0,00	
2.4 Outras deduções		0,00	
Previdência Privada, Funpresp, FAPI e Parcela isenta de aposentadoria, reserva remunerada, reforma e pensão para declarante com 65 anos ou mais, caso não tenha sido deduzida dos rendimentos tributáveis. Carne-Leão: Livro Caixa.			
2.5 Total de Deduções		0,00	
* Para mais informações sobre deduções verificar IN RFB nº 1500, de 2014.			
3. Base de cálculo (1 - 2.5)		0,00	
4. Imposto		0,00	
Demonstrativo da Apuração do Imposto			
Faixa da Base de Cálculo		Alíquota	Valor do Imposto
1ª Faixa	0,00	Isento	0,00
2ª Faixa	0,00	7,5%	0,00
3ª Faixa	0,00	15,0%	0,00
4ª Faixa	0,00	22,5%	0,00
5ª Faixa	0,00	27,5%	0,00
Total	0,00	---	0,00

22. Imagine a seguinte situação: No ano de 2014 você compra um celular por 1.000,00 reais em um site especializado, e espera que o celular dure, em média 3 anos, tempo médio que um eletroeletrônico dura. Porém, em 1 ano seu celular começa a apresentar pequenos problemas de funcionamento.
- Na mesma época, sai outro aparelho mais moderno e mais bonito visualmente, você consideraria trocar de celular para buscar mais “qualidade”?
 - Tendo em mente que muitas vezes a troca em uma loja de Assistência Autorizada de certos componentes de um celular pode custar quase o preço de um aparelho novo, qual seria sua decisão?
 - Considerando que o Brasil é o país que mais descarta lixo eletrônico na América latina (Daniella Franco, 2017), você compraria um aparelho ou tentaria consertar e continuar com um telefone mais velho?
23. Muitas pessoas estão se tornando empreendedores com a esperança de melhorar sua situação financeira em tempos de crise. Digamos que este é o seu caso. Você quer abrir uma empresa que dê lucro em curto prazo, mas que se mantenha em longo prazo. Além disso, você se importa com o meio ambiente e acredita na importância das empresas produzirem de maneira sustentável, entretanto, percebe que ser amigo do meio ambiente significa um investimento maior no seu negócio e lucros relativamente menores. Assim, o que você decide?

Objetivos Específicos

Exercício 22

- Investigar situações financeiras envolvendo consumo, comportamento, cultura e sustentabilidade, em especial sobre às heurísticas e vieses presentes nas ações de consumo e suas possíveis consequências
- Resolver problemas relacionados a situações de consumo, comportamento, cultura e sustentabilidade
- Construir propostas e soluções alternativas como apoio para a tomada de decisão em situações de consumo e sustentabilidade, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos, em especial aos aspectos culturais e comportamentais.

Objetivos Específicos

Exercício 23

- Investigar situações financeiras envolvendo consumo, comportamento, cultura e sustentabilidade, em especial sobre às heurísticas e vieses presentes nas ações de consumo e suas possíveis consequências
- Construir propostas e soluções alternativas como apoio para a tomada de decisão em situações de consumo e sustentabilidade, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos, em especial aos aspectos culturais e comportamentais.



Objetivos Específicos

Exercícios 24 e 25

■ Investigar situações financeiras envolvendo consumo, comportamento, cultura e sustentabilidade, em especial sobre as heurísticas e vieses presentes nas ações de consumo e suas possíveis consequências

■ Resolver problemas relacionados a situações de consumo, comportamento, cultura e sustentabilidade

■ Construir propostas e soluções alternativas como apoio para a tomada de decisão em situações de consumo e sustentabilidade, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos, em especial aos aspectos culturais e comportamentais.

Objetivos Específicos

Exercício 26

■ Identificar diferentes fatores que influenciam o valor do dinheiro no tempo, tais como juros, inflação, câmbio, investimentos e percepção de utilidade.

■ Resolver problemas relacionados a juros simples ou compostos

■ Analisar e tomar decisões em situações econômico financeiras que envolvam o valor do dinheiro no tempo, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos.

24. As garrafas de vidro retornáveis em comparação com as garrafas PET têm grande vantagem ambiental, já que essas geram menos resíduo (lixo) e tem melhor degradação pelo ambiente. Entretanto, as garrafas PET ainda se mantêm com força no mercado por causa de sua maior (e basicamente única) vantagem: a praticidade, já que quando o consumidor esvazia a garrafa, tudo o que ele tem que fazer é jogá-la fora no lixo mais próximo.

a) Conhecendo as implicações ambientais e considerando sua rotina diária, responda: Qual é sua escolha, em relação à embalagem, na hora de adquirir uma bebida industrializada?

b) Temos, atualmente, diversas ONGs que colaboram com a redução de resíduos de lixo na natureza. Exemplo disso é a organização não governamental de Petrolina, no sertão pernambucano, que transforma garrafas PET em vassouras. Caso você sempre opte por garrafas plásticas e tem que descartá-las em seu dia a dia, você tentaria achar uma forma de reciclar esse material para que ele não seja descartado diretamente na natureza?

25. Alimentos orgânicos são comprovadamente melhores à saúde que alimentos que usam produtos químicos em suas colheitas para gerarem mais lucro. Mas o que é notado na hora da compra desses alimentos é um elevado preço em relação aos alimentos convencionais, dificultando sua entrada na casa dos brasileiros.

Alimento	Agricultura Convencional (R\$)	Agricultura Orgânica (R\$)	Diferença Percentual (%)
Banana (kg)	4,54	6,00	24,3
Couve (un.)	2,16	3,00	28,0
Maçã (kg)	7,12	12,00	40,6
Cenoura (kg)	3,23	6,00	46,1
Abóbora (kg)	3,38	7,00	51,7
Tomate (kg)	5,38	11,50	53,2
Aipim (kg)	2,20	6,50	66,1
Laranja (kg)	2,18	7,00	68,8

a) Se você se depara com essa escolha, o que contaria mais: o preço ou a qualidade oferecida pelo alimento em questão?

b) Supondo que você seja responsável por pagar pela sua alimentação diária dentro e fora de casa, responda: você abriria mão ou reduzia outros gastos como festas, cuidados com a aparência, shows, etc. em prol de uma alimentação mais saudável?

c) Supondo que você seja responsável por pagar pela sua alimentação diária dentro e fora de casa, responda: você abriria mão ou reduzia outros gastos como festas, cuidados com a aparência, shows, etc. em prol de uma alimentação mais saudável?

26. Leia atentamente as informações a seguir:

Caixa anuncia nova redução dos juros do cheque especial

O presidente da Caixa Econômica Federal (CEF), Pedro Guimarães anunciou, nesta quinta-feira (26/03), uma nova redução na taxa de juros do cheque especial e do parcelamento do cartão de crédito. Foi a segunda redução em taxas em sete dias, em razão da crise gerada pela pandemia do novo coronavírus. O anterior foi no último dia 19.



Segundo Guimarães, a taxa do cheque especial da Caixa passará de 4,4% para 2,9% ao mês. “Uma taxa recorde em termos de ser menor — 41% de redução em relação à taxa que já era a menor do mercado”, afirmou durante uma live do presidente Jair Bolsonaro em uma rede social (Arthur Guimarães, 2021).

Larissa, cliente da CEF, teve uma emergência e precisa de R\$ 10.000,00 para daqui a dois dias. Ela pode usar o cheque especial, a um custo agora reduzido conforme a matéria acima, para fazer um empréstimo, nesse valor, direto pelo *bankline*, ou buscar uma alternativa mais barata. Pensando um pouco, ela lembra que tem R\$ 10.000,00 na poupança, guardados por ela mesma para uma emergência. Considere que esse dinheiro, na poupança, renda 0,5% ao mês.

- a) Qual a estratégia mais eficiente, dentre as apresentadas, do ponto de vista exclusivamente financeiro? Justifique sua resposta.
- b) Quantos reais ela economizaria em juros, considerando um empréstimo de R\$ 10.000,00 durante 5 meses, na comparação entre as alternativas apresentadas, mantendo-se a taxa de juro do cheque especial praticada pela CEF conforme a matéria?

27. A Tabela a seguir apresenta as taxas mensais e anuais de juros cobradas pelos principais bancos brasileiros para quem “entra” no cheque especial. Os valores são relativos a setembro de 2017. Baseado nessas informações, responda aos itens abaixo.

Tabela 26: Taxas de juros dos bancos brasileiros.

Banco	Taxa Mensal (%)	Taxa Anual (%)
Banco do Brasil S.A.	11,99	289,19
Banco Original	11,99	289,21
Banco Safra S.A.	12,23	299,42
Banco Bradesco S.A.	12,25	300,07
Caixa Economica Federal	12,51	311,27
Itaú Unibanco S.A.	12,51	311,27
Banco A.J. Renner S.A.	13,68	365,57
Banco Daycoval S.A.	13,96	379,74
Banco Santander (Brasil) S.A.	14,75	421,29

Dados do Banco Central. Acesso em 12 de Maio de 2019.

- a) Determine o valor da dívida de uma pessoa, cliente do Banco Itaú, que utiliza R\$ 10.000,00 do cheque especial por 3 meses (ou seja, pega R\$ 10.000,00 emprestado no banco, via cheque especial, e só paga após 3 meses).
- b) Conforme mostra a tabela, os clientes do Banco Santander pagam 14,75% ao mês de juros no cheque especial, o que equivale a 421,29% ao ano. Explique por que essas taxas são equivalentes.

28. A família Silva identificou que está gastando mais do que ganha, e por dois meses seguidos, seus integrantes gastaram em torno de 400,00 reais a mais do que ganharam, usando para isso juros do cheque especial com custo de 10% ao mês. Que atitude a família Silva deveria tomar para resolver essa situação?

Objetivos Específicos

Exercício 27

- Investigar situações financeiras que envolvam o valor do dinheiro no tempo, considerando taxas proporcionais ou equivalentes
- Resolver problemas relacionados às taxas proporcionais ou equivalentes.
- Resolver problemas relacionados a juros simples ou compostos
- Analisar e tomar decisões em situações econômico financeiras que envolvam o valor do dinheiro no tempo, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos.

Objetivos Específicos

Exercício 28

- Investigar situações financeiras que envolvem orçamento, planejamento e gestão financeira, tanto a pessoal quanto a familiar.
- Resolver problemas relacionados ao orçamento e planejamento financeiro.
- Construir propostas e soluções alternativas como apoio para a tomada de decisão em situações envolvendo orçamentos e planejamentos financeiros, considerando aspectos matemáticos e não matemáticos.



Objetivos Específicos

Exercício 29

- Investigar situações financeiras envolvendo consumo e comportamento, em especial sobre as heurísticas e vieses presentes nas ações de consumo e suas possíveis consequências
- Resolver problemas relacionados a estratégias de marketing e propagandas em situações de consumo.

29. (Adaptado de Ediana Volz Neitzke Karnopp et al., 2017) Observe o preço praticado numa famosa lanchonete com Milk Shake



- Milk Shake de Ovomaltine 500 mL → R\$ 10,50
- Milk Shake de Ovomaltine 700 mL → R\$ 11,90

- a) Mostre que os preços destas bebidas não são proporcionais às respectivas capacidades.
- b) Por que estes preços não são proporcionais?
- c) Que impactos na nossa tomada de decisão desproporcionalidade pode causar?



SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

- Sim, mudaria, pois as taxas de rendimento do Tesouro pré-fixado nos meses de setembro, outubro e novembro são maiores que as taxas de rendimento desses meses três meses na poupança. Logo, o dinheiro aplicado no Tesouro pré-fixado renderia mais que na Poupança.
 - Na poupança, os R\$ 10.000,00 renderiam, em três meses, o valor de $1.000 \times 1,005 \times 1,0047 \times 1,0043 = 10.140,65$ reais; No Tesouro pré-fixado 2034, renderia o valor de $10.000 \times 1,008 \times 1,007 \times 1,006 = 10.221,46$ reais. A diferença em reais, imediatamente após as três rentabilidades é de $10.311,46 - 10.140,65 = 70,81$ reais.

Nos demais itens, a resposta é individual.

- Resposta individual.
 - A taxa máxima do dinheiro que seria emprestado deveria ser menor que 6 pois, resolvendo as equações: $i \geq 0$ e $900 = 200 + \frac{200}{(1+i)^1} + \frac{200}{(1+i)^2} + \frac{200}{(1+i)^3} + \frac{200}{(1+i)^4}$, encontramos a solução para i , positivo e real, $0,06 = 6\%$, ou seja, para um empréstimo que cobre uma taxa maior ou igual a 6%, não valeria a pena.

3. Ambas as respostas são individuais

4. O aumento do poder de compra é: $\frac{1+0,20}{1+0,1} = 1,0909$, ou seja, aproximadamente 9,09%.

5. Respostas individuais

- Se o preço do etanol fosse 1,80 reais/L, a escolha seria etanol, pois R\$ 1,80 corresponde a 70% ($\frac{2,8}{4} = 0,70 = 70\%$) do preço da gasolina. Se o preço do etanol fosse R\$ 3,00/litro, a escolha seria a gasolina, pois R\$ 3,00 corresponde a 70% ($\frac{3}{4} = 0,75 = 75\%$) do preço da gasolina, ou seja, mais de 70%.
 - Resposta individual. Convide seu aluno a pensar sobre a questão ambiental e tentar construir propostas e soluções alternativas como apoio para a tomada de decisão em situações de consumo e sustentabilidade

7. a) Resposta individual.

b) Do ponto de vista exclusivamente financeiro, depende da taxa mínima de atratividade que nesse caso é a rentabilidade da poupança.

- Se a poupança render mais que 0,80% ao mês, é melhor pagar a prazo em 12x sem juros.
- Se a poupança render 0,80% ao mês, é indiferente.
- Se a poupança render menos que 0,80% é melhor pagar à vista, com 5% de desconto.

Essa taxa pode ser obtida de diversas maneiras, sendo a maioria delas usando a equivalência de capitais. Essencialmente, queremos descobrir qual é a taxa que faz 1.140,00 reais hoje serem equivalentes a 12 prestações de 100,00 reais, com a primeira sendo paga um mês após a compra.

Matematicamente, o problema envolve a resolução de uma equação polinomial do 12º grau. Mas com o uso de algum aplicativo, da função taxa de uma planilha eletrônica ou do atingir meta do Excel, pode-se facilmente descobrir a taxa. A simulação a seguir traz uma forma de pensar o problema, usando penas multiplicação e subtração, fazendo uso de uma planilha eletrônica.



Tabela P.2: Simulação considerando uma taxa de 0,798 % a.m.

	Devo (R\$)	Pago (R\$)	Saldo (R\$)
0	1.140,00	—	1.140,00
1	1.149,10	100,00	1.149,10
2	1.057,47	100,00	957,47
3	965,11	100,00	865,11
4	872,02	100,00	772,02
5	778,18	100,00	678,18
6	683,59	100,00	583,59
7	588,25	100,00	488,25
8	492,14	100,00	392,14
9	395,27	100,00	295,27
10	297,63	100,00	197,63
11	199,21	100,00	99,21
12	100,00	100,00	0,00

8. O fluxo analítico que representa os capitais investidos estão representados na [Tabela P.2](#)

	Jan/20	Jan/21	Jan/22	Jan/23	Jan/24	Jan/25
Saldo inicial	—	3.300,00	7.095,00	11.442,75	16.407,19	22.059,08
Depósito	3.000,00	3.150,00	3.307,50	3.472,88	3.646,52	—
Saldo final	3.000,00	6.450,00	10.402,50	14.915,63	20.053,71	22.059,08

9. Resposta individuais.

10. a) Resposta pessoal

b) Uma âncora poderia ser as informações relevantes no anúncio da venda para o consumidor estarem em letras bem pequenas

As demais respostas são individuais

11. Os cenários A e B são iguais, pois representam as mesmas opções.

12. a) Resposta individual

b) Se o preço fosse proporcional, o pacote grande deveria custar R\$ 7,00 ($2 \times 3,5$). A resposta da forma que você acredita que essa informação influenciaria nas suas escolhas é individual.

As demais respostas são individuais.

13. Respostas individuais

14. O investimento de R\$ 10.000,00 na poupança, em um ano, a uma taxa média de 0,50 % ao mês, terá um rendimento de $10.000 \times (1,005)^{12} = 10.616,78$ reais. Já uma pessoa devendo por um ano no crédito rotativo terá uma dívida de $10.000 \times (1,15)^{12} = 53.502,50$ reais.



A diferença entre esses valores após 1 ano é: R\$ 535.032,50 – 10.616,78 = 42.885,72.

15. a) Há cobrança de juros, pois o produto à vista não custa R\$ 1.000,00, mas sim R\$ 900,00 reais, e a prazo, duas de R\$ 500,00.
- b) O pagamento é em duas parcelas, sendo R\$ 500,00 pago daqui a um mês e R\$ 500,00 daqui a dois meses. Assim, na data da compra, temos:
- a primeira parcela vale $\frac{R\$ 500,00}{(1+i)}$;
 - a segunda parcela vale $\frac{R\$ 500,00}{(1+i)^2}$;

Sendo assim,

$$R\$ 900,00 = \frac{500}{(1+i)} + \frac{500}{(1+i)^2}.$$

Resolvendo a equação do segundo grau, temos duas raízes, sendo uma positiva, igual a 0,0732, e outra negativa, igual a -1,51766. Logo, a taxa de juro cobrada é de 7,32 % ao mês.

16. Se você escolher a opção com 10 % de desconto à vista, você irá pagar o valor de R\$ 1.800,00 na compra do computador. Caso você aplique o valor excedente de R\$ 200,00 na poupança, a uma taxa de 0,5 % ao mês, ao final de um ano, você terá o valor total de R\$ 201,20.
17. a) Resposta pessoal
- b) Considerando a sua dívida no cartão de crédito de R\$ 1.900,00, e que você pagou o valor mínimo de R\$ 285,00, para o próximo mês você ficará devendo ao cartão o valor de R\$ 1.615,00. Como o cartão cobra uma taxa de 12 % ao mês, por conta do crédito rotativo, após um mês, a sua dívida será igual a $1,12 \times 1.612 = 1.080,80$ reais.
- c) No próximo mês, o total da sua dívida será R\$ 1.808,80 (Cartão de Crédito). Porém, você só terá o valor de R\$ 900,00 (quanto você ganhou neste mês) mais R\$ 815,00 (o quanto sobrou dos R\$ 2.000,00 pagando os R\$ 900,00 do telefone mais o mínimo do cartão de crédito), que é igual a R\$ 1.717,00. Com isto, você não conseguirá pagar toda a sua dívida de R\$ 1.808,80 após um mês.
- d) Resposta pessoal.

18. Investindo na poupança, rendendo 8 % ao ano, $R\$ 100.000,00 \times 1,08 = R\$ 108.000,00$.

No banco A, investindo R\$ 100.000,00 durante 1 ano, à taxa prefixada de 12 % ao ano, o rendimento ao final desse ano será: $10.000 \times 1,12 = 112.000,00$ reais, deste valor é descontado 17,5 % de imposto sobre o rendimento, ou seja, é descontado $0,175 \times 112.000 = 2.100,00$ reais, logo, o rendimento no banco A é $112.000 - 2.100 = 109.900,00$ reais

No banco B, investindo R\$ 100.000,00 durante 1 ano, à taxa prefixada de 10 % ao ano, o rendimento ao final desse ano será: $10.000 \times 1,1 = 110.000,00$ reais, deste valor é descontado 17,5 % de imposto sobre o rendimento, ou seja, é descontado $0,175 \times 110.000 = 2.100,00$ reais, logo, o rendimento no banco B é $110.000 - 2.100 = 107.900,00$ reais.

A conclusão é que, do ponto de vista exclusivamente financeiro, a opção melhor seria investir no banco A, pois é o banco com maior rendimento de R\$ 109.900,00 ao final de 1 ano. A sua opinião sobre a escolha da maioria das pessoas é pessoal.

19. Para responder à primeira pergunta, basta observar que, como o valor nominal investido é o mesmo, e a taxa também é a mesma em ambas, então quanto antes investirmos, melhor. Logo, a segunda gera um valor futuro maior.

Para Thales, um valor de R\$ 1.000,00 mensais, a uma taxa de 0,5 % ao mês, resultará, em 20 anos:

$$\frac{1000 \cdot ((1 + 0,005)^{240} - 1)}{0,005} = R\$ 462.040,90$$



Para Lucas, um valor de R\$ 2.000,00 mensais, a uma taxa de 0,5 % ao mês, durante 10 anos, e mais o rendimento até os 20 anos, será:

$$\frac{2000((1 + 0,005)^{120} - 1) \times 1,005^{120}}{1,005 - 1} = \text{R\$ } 596.323,10$$

Portanto, a diferença entre os valores acumulados por Lucas e Thales será de

$$596.323,10 - 462.040,90 = \text{R\$ } 134.282,20$$

20. Resposta pessoal.

21. Resposta pessoal.

22. Respostas pessoais.

23. Resposta pessoal.

24. Respostas pessoais.

25. Respostas pessoais.

a) Do ponto de vista exclusivamente financeiro, seria melhor Larissa utilizar os R\$ 10.000,00 da poupança, pois não ficaria devendo ao banco, e com isso não pagaria juros.

b) O empréstimo no valor de R\$ 10.000,00 durante 5 meses no cheque especial, a uma taxa de 2,9 % ao mês, implicaria numa dívida de $10.000 \times (1 + 0,029)^5 = 11.536,57$ reais. Ou seja, Larissa economizaria de juros o valor de R\$ 1.536,57.

26. a) O valor da dívida dessa pessoa que utiliza R\$ 10.000,00 do cheque especial por 3 meses do banco Itaú, a uma taxa de 12,52 % a.m. é de $10.000 \times (1 + 0,1252)^3 = 14.245,88$ reais

b) Essas taxas são equivalentes, pois $(1 + 0,1475)^{12} = 1 + i_a$, onde i_a é a taxa anual. Resolvendo esta equação, $i_a = 4,2123 = 421,23 \%$, aproximadamente.

27. Resposta individual.

28. a) Os preços não são proporcionais, pois 700 ml corresponde a um fator de 1,4 (aumento de 40 %) com relação a 500ml, não entanto, podemos perceber pelo enunciado que R\$ 11,90 não corresponde a $10,50 \times 1,4 = 14,74$.

b) Os preços não são proporcionais, pois à medida que a grandeza capacidade aumenta, a outra grandeza preço não aumenta proporcionalmente. Isto acontece, por exemplo, porque a empresa possui alguns gastos em comum, tanto para o milk shake de 500ml, quanto para o de 700ml. Por exemplo, o atendente que serve o de 500ml será o mesmo que serve o de 700ml. Além do mais, o preço se torna mais atrativo para convencer o cliente de que vale mais a pena comprar o de 700ml, pois ele está pagando menos e consumindo mais.

c) resposta pessoal.



REFERÊNCIAS

- AEF-Brasil. (2010). Estratégia Nacional de Educação Financeira. Disponível em: <http://www.vidaedineiro.gov.br>,
- Albuquerque, F. (2022). Custo da cesta básica aumenta nas 17 capitais pesquisadas pelo Dieese. *Agência Brasil*. Disponível em: <https://agenciabrasil.ebc.com.br/economia/noticia/2022-05/custo-da-cesta-basica-aumenta-nas-17-capitais-pesquisadas-pelo-dieese>, acesso em 6 de maio de 2022.
- Alvarenga, D., Glenia, F., Gasparin, G., & Cunha, S. (2013). G1 explica a inflação. *G1*. Disponível em: <http://estaticog1.globo.com/2013/05/inflacao/page1/?q=>, acesso em 1 de abril de 2017.
- Aprea, C., Wuttke, E., Breuer, K., Koh, N. K., Davies, P., Greimel-Fuhrmann, B., & Lopus, J. S. (2016). *International Handbook of Financial Literacy*. Springer.
- Arida, P., Bacha, E., & Lara-Resende, A. (2004). High interest rates in Brazil: conjectures on the jurisdictional uncertainty. *Rio de Janeiro: Casa das Garças*.
- Atkinson, A., & Messy, F.-A. (2018). *Measuring Financial Literacy: Results of the OECD / International Network on Financial Education (INFE) Pilot Study* (Working Paper N. 15). OECD. Paris, OECD Publishing.
- Banco Central do Brasil. (2023a). *Calculadora do Cidadão*. Governo Federal do Brasil. Disponível em: <https://www.bcb.gov.br/meubc/calculadoradocidadao>, acesso em 7 de julho de 2023.
- Banco Central do Brasil. (2023b). *Estatísticas*. Governo Federal do Brasil. Disponível em: <https://www.bcb.gov.br/estatisticas>, acesso em 7 de julho de 2023.
- Banco Central do Brasil. (2023c). *Taxas de juros*. Governo Federal do Brasil. Disponível em: <https://www.bcb.gov.br/estatisticas/txjuros>, acesso em 7 de julho de 2023.
- Barboza, R. d. M. (2015). Taxa de juros e mecanismos de transmissão da política monetária no Brasil. *Revista de Economia Política*, 35, 133–155.
- Barros, O. d. (Ed.). (2011). *A Taxa de Impaciência do Brasileiro é mais Alta do que em Outros Países?* (Vol. 34). Banco Bradesco.
- Bauman, Z. (2008). *Vida para consumo : a transformação das pessoas em mercadorias*. Zahar.
- Baumol, W. J., de Ferranti, D., Malach, M., Pablos-Méndez, A., Tabish, H., & Wu, L. G. (2012). *The Cost Disease: Why Computers Get Cheaper and Health Care Doesn't*. Yale University Press.
- Beatty, S. E., & Ferrell, M. E. (1998). Impulse buying: Modeling its precursors. *Journal of Retailing*, 74(2), 169–191.
- Brasil. (1996). *LDB - Lei nº 9394/96, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da Educação Nacional*. Ministério de Educação e Cultura. Brasília.
- Brasil. (1998). *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática* (S. de Educação Fundamental, Ed.). Brasília. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/%20arquivos/pdf/matematica.pdf>,
- Brasil. (2015a). *O Banco Central e a Educação Financeira*. Banco Central do Brasil. Brasília.
- Brasil. (2015b). *Programa Nacional de Educação Fiscal. Escola de Administração Fazendária – ESAF. Documento Base*. Grupo Educação Fiscal – GEF, Ministério da Fazenda. Brasília. Disponível em: https://receita.fazenda.rs.gov.br/download/20170704155154diretrizes_nacionais_da_educacao_fiscal.pdf,
- Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Ministério da Educação. Brasília. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>,
- Bresser-Pereira, L. C., & Nakano, Y. (2002). Uma estratégia de desenvolvimento com estabilidade. *Revista de Economia Política*.
- Brito, C. (2019). Sua calça jeans gastou mais de 5 mil litros de água para ser produzida: entenda. *Revista Galileu*. Disponível em: <https://revistagalileu.globo.com/Ciencia/Meio-Ambiente/noticia/2019/08/sua-calca-jeans-gastou-mais-de-5-mil-litros-de-agua-para-ser-produzida-entenda.html>, acesso em 18 de junho de 2023.
- Campos, A. B. (2013). *Investigando como a Educação Financeira Crítica pode contribuir para tomada de decisões de consumo de jovens indivíduos-consumidores* [diss. de maestr., Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF].
- Chade, J. (2020). Um a cada quatro jovens no Brasil nem trabalha e nem estuda. *UOL Notícias*. Disponível em: <https://noticias.uol.com.br/colunas/jamil-chade/2020/03/09/um-a-cada->



- [quatro-jovens-no-brasil-nem-trabalha-e-nem-estuda.htm](#), acesso em 18 de junho de 2023.
- Chinaglia, R. (2021). Crise econômica e política levam o real ao menor poder de compra desde 1994 — como as criptomoedas podem te proteger? *Cointelegraph Brasil*. Disponível em: <https://br.cointelegraph.com/news/sad-with-the-price-of-bitcoin-dont-worry-dropping-of-r-30-000-is-nothing-for-btc-say-experts>, acesso em 8 de julho de 2022.
- Cirillo, B. (2020). Arroz chega a custar R\$ 40,00, e setor diz que preço deve continuar em alta. *Economia UOL*. Disponível em: <https://economia.uol.com.br/noticias/redacao/2020/09/08/preco-do-arroz-dispara.html>, acesso em 18 de junho de 2023.
- Corsini, I., & Janone, L. (2021). Alta no preço das carnes faz hábito alimentar dos brasileiros mudar. *CNN Brasil*. Disponível em: <https://www.cnnbrasil.com.br/economia/alta-no-preco-das-carnes-faz-habito-alimentar-dos-brasileiros-mudar/>, acesso em 8 de abril de 2022.
- da Costa, F. N. (2010). *Pirâmide Etária Brasileira*. Blog Cidadania & Cultura. Disponível em: <https://fernandonogueiracosta.wordpress.com/2010/12/16/piramide-etaria-brasileira/>, acesso em 7 de agosto de 2020.
- d'Agosto, M. (Apresentação). (2023). *CBN Dinheiro* [podcast]. CBN. Disponível em: <https://www.podbean.com/podcast-detail/k9y47-4173d/CBN-Dinheiro---Mauro-Halfeld-Podcast>,
- Damásio, A. (2012). *O erro de Descartes: emoção, razão e o cérebro humano*. Companhia das Letras.
- de Melo Ferreira, V. R. (2011). *Decisões econômicas: você já parou para pensar?* (2ª ed.). Évora. Destaque Notícias. (2020). Panificadores prometem reajustar preço do pão francês. Disponível em: <https://www.destaquenoticias.com.br/panificadores-de-sergipe-prometem-reajustar-preco-do-pao/>, acesso em 18 de junho de 2023.
- Dias, N. (2018). *Educação Financeira e Educação Fiscal: Uma proposta para a sala de aula da Educação Básica* (Produto Acadêmico Final (Especialização em Educação Matemática)). Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura. Rio de Janeiro.
- Erber, F. S. (2008). Development projects and growth under finance domination. *Revue Tiers Monde*, 3(195), 597–629.
- European Central Bank. (2018). *Annual report 2017* (rel. técn.). Frankfurt.
- Favero, C., & Giavazzi, F. (2002). Why are Brazil's Interest Rates So High? *SSRN Electronic Journal*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.326781>
- Ferreira, V. (2008). *Psicologia econômica : estudo do comportamento econômico e da tomada de decisão*. Elsevier.
- Franco, D. (2017). Mundo produzirá 50 milhões de toneladas de lixo eletrônico em 2017. *Radio France Internationale*. Disponível em: <https://www.rfi.fr/br/mundo/20170427-mundo-produzira-50-milhoes-de-toneladas-de-lixo-eletronico-em-2017>, acesso em 19 de julho de 2023.
- Giannetti, E. (2005). *O valor do amanhã: ensaio sobre a natureza dos juros*. Companhia das Letras.
- Gonçalves, F. M., Holland, M., & Spacov, A. D. (2007). Can jurisdictional uncertainty and capital controls explain the high level of real interest rates in Brazil? Evidence from panel data. *Revista Brasileira de Economia*, 61(1), 49–75.
- Guimarães, A. (2021). Caixa anuncia nova redução dos juros do cheque especial. *Suno Notícias*. Disponível em: <https://www.suno.com.br/noticias/caixa-corte-juros-cheque-especial/>, acesso em 19 de julho de 2023.
- IBGE. (2010). *Pesquisa nacional por amostra de domicílios: PNAD 2010* (rel. técn.). Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Rio de Janeiro.
- IBGE. (2019a). *Desigualdades Sociais por Cor ou Raça no Brasil* (rel. técn.). Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv101681_informativo.pdf, acesso em 10 de julho de 2020.
- IBGE. (2019b). *Pesquisa de orçamentos familiares 2017–2018: primeiros resultados* (rel. técn.). Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Rio de Janeiro. Disponível em: <https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv101670.pdf>, acesso em 18 de junho de 2023.
- IBGE. (2022a). *Inflação*. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/explica/inflacao.php>, acesso em 8 de maio de 2022.
- IBGE. (2022b). *Índice de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA) — Séries históricas*. IBGE. Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/estatisticas/economicas/precos-e-custos/9256-indice-nacional->



- [de-precos-ao-consumidor-amplio.html?t=series-historicas&utm_source=landing&utm_medium=explica&utm_campaign=inflacao#plano-real-ano](https://www.ibge.gov.br/indicadores-de-precos-ao-consumidor-amplio.html?t=series-historicas&utm_source=landing&utm_medium=explica&utm_campaign=inflacao#plano-real-ano), acesso em 8 de abril de 2022.
- IBGE. (2022c). *Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua - PNAD Contínua Retrospectiva 2012-2021* (rel. técn.). Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Rio de Janeiro. Disponível em: https://ftp.ibge.gov.br/Trabalho_e_Rendimento/Pesquisa_Nacional_por_Amostra_de_Domicilios_continua/Principais_destaqués_PNAD_continua/2012_2021/PNAD_continua_retrospectiva_2012_2021.pdf,
- Kahneman, D. (2012). *Rápido e devagar: Duas formas de pensar*. Objetiva.
- Karnopp, E. V. N., dos Santos Vaz, J., Schafer, A. A., Muniz, L. C., de Leon Veleda de Souza, R., dos Santos, I., Gigante, D. P., & Assunção, M. C. F. (2017). Consumo alimentar de crianças menores de seis anos conforme o grau de processamento. *Jornal de Pediatria*, 93(1), 70–78. <https://doi.org/10.1016/j.jped.2016.04.007>
- Leitão, M. (2011). *Saga brasileira : a longa luta de um povo por sua moeda*. Editora Record.
- Lima, A. P. (2009). *Avaliação da arrecadação dos principais impostos estaduais — ICMS e IPVA — em relação ao Produto Interno Bruto* [diss. de maestr., Fundação Escola de Comércio Álvares Penteado FECAP].
- Lusardi, A. (2008). *Financial Literacy: An Essential Tool for Informed Consumer Choice?* (Working Paper). National Bureau of Economic Research. Disponível em: <http://www.nber.org/papers/w14084>,
- Machado, L., & Bueno, R. (2023). Juros Altos, Varejo em Baixa: a Crise em Efeito Dominó. *Piauí*. Disponível em: <https://piaui.folha.uol.com.br/juros-altos-varejo-em-baixa- crise-em-efeito-dominio/>, acesso em 7 de julho de 2023.
- Margolinas, C. (Ed.). (2013). *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22*.
- Martello, A. (2017). Após 5 meses de ingresso de recursos, poupança perde R\$ 2,00 bilhões em outubro. *G1*. Disponível em: <https://g1.globo.com/economia/noticia/apos-5-meses-de-ingresso-de-recursos-poupanca-perde-r-2-bilhoes-em-outubro.ghtml>, acesso em 19 de julho de 2023.
- Matos, L. P. (2019). *Uma análise sobre a tomada de decisão financeira em livros didáticos de Matemática do Ensino Médio na perspectiva dos Ambientes de Educação Financeira Escolar* (Trabalho de Conclusão de Curso). Colégio Pedro II. Rio de Janeiro.
- Matos, T., & Paulo, P. P. (2022). Carrinho esvaziado: G1 mostra a queda do poder de compra de R\$ 200,00 em dois anos no Brasil. *G1*. Disponível em: <https://g1.globo.com/economia/noticia/2022/07/08/carrinho-esvaziado-g1-mostra-a-queda-do-poder-de-compra-de-r-200-em-dois-anos-no-brasil.ghtml>, acesso em 19 de julho de 2023.
- Máximo, W. (2019). Banco Central surpreende e reduz juros básicos para 6 % ao ano. *Agência Brasil*. Disponível em: <https://agenciabrasil.ebc.com.br/economia/noticia/2019-07/banco-central-surpreende-e-reduz-juros-basicos-para-6-ao-ano>, acesso em 20 de agosto de 2019.
- Motta, M., & Rolim, R. (2014). O estado da arte das pesquisas em matemática financeira nos programas de mestrado e doutorado da área de ensino da Capes. *Educação Matemática Pesquisa : Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 16(2).
- Muinhos, M. K., & Nakane, M. I. (2006). *Financial Literacy: An Essential Tool for Informed Consumer Choice?* (Working Paper N. 101). Banco Central do Brasil. Brasília.
- Muniz Jr., I. (2016a). *Econs ou Humanos? Um estudo sobre a tomada de decisão em Ambientes de Educação Financeira Escolar* [tese de dout., Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ].
- Muniz Jr., I. Educação Financeira e a sala de aula de Matemática: conexões entre a pesquisa acadêmica e a prática docente. Em: *Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática*. Sociedade Brasileira de Educação Matemática - SBEM. São Paulo, 2016.
- Muniz Jr., I., & Jurkiewicz, S. (2016a). Representações temporais e o valor do dinheiro no tempo: conexões entre a Educação Financeira e o Ensino de Matemática. *Revista BOEM*, 4(7), 116–138. Disponível em: <https://www.revistas.udesc.br/index.php/boem/article/view/8649>, acesso em 4 de agosto de 2023.
- Muniz Jr., I., & Jurkiewicz, S. (2016b). Tomada de Decisões e Trocas Intertemporais: uma contribuição para a construção de ambientes de educação financeira escolar nas aulas de matemática. *Revista de Educação, Ciências e Matemática*.
- Neri, M. C. (2010). A Nova Classe Média: O Lado Brilhante dos Pobres. *FGV Social - Pesquisas*.



- Pessoa, C. A. d. S., Muniz, I., Jr., & Kistemann, M. A., Jr. (2018). Cenários Sobre Educação Financeira Escolar: entrelaçamentos entre a pesquisa, o currículo e a sala de aula de Matemática. *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 9(1).
- Portal da Transparência. (2020). *Órgãos superiores: Ministério da Educação (MEC)*. Governo Federal do Brasil. Disponível em: <https://www.portaltransparencia.gov.br/orgaos-superiores/26000-ministerio-da-educacao>, acesso em 1 de julho de 2020.
- Raworth, K., & Schlesinger, G. (2019). *Economia Donut: UMA ALTERNATIVA AO CRESCIMENTO A QUALQUER CUSTO*. Zahar.
- Redação da Veja. (2019). Investidores no Tesouro Direto crescem 36% no primeiro semestre. *Revista Veja*. Disponível em: <https://veja.abril.com.br/economia/investidores-no-tesouro-direto-crescem-36-no-primeiro-semester/>, acesso em 2 de agosto de 2019.
- Redação do G1. (2017). Tesouro Direto supera 1,5 milhão de investidores cadastrados em julho. *G1*. Disponível em: <https://g1.globo.com/economia/seu-dinheiro/noticia/tesouro-direto-supera-15-milhao-de-investidores-cadastrados-em-julho.ghtml>, acesso em 19 de julho de 2023.
- Redação do Panorama Crypto. (2020). Pandemia pode gerar inflação no longo prazo. *Panorama Crypto*. Disponível em: <https://panoramacrypto.com.br/pandemia-pode-gerar-inflacao-no-longo-prazo/>, acesso em 8 de abril de 2022.
- Riveira, C. (2021). De arroz a gasolina: por que a inflação virou o problema que faltava ao Brasil em 2021. *Exame*. Disponível em: <https://exame.com/economia/pandemia-crise-e-desemprego-agora-a-inflacao-se-tornou-a-ameaca-que-faltava-no-brasil/>, acesso em 8 de abril de 2022.
- Saito, A. T. (2007). *Uma contribuição ao desenvolvimento da educação em finanças pessoais no Brasil* [diss. de mestr., FEA/Universidade de São Paulo - USP].
- Santana, M. R. d. S. M. (2019). *Uma Planejamento Financeiro e Orçamento Doméstico em Ambientes de Educação Financeira Escolar: Uma experiência em design de tarefas para o Ensino Médio* (Produto Acadêmico Final (Especialização em Docência da Educação Básica na Disciplina Matemática)). Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura. Rio de Janeiro.
- Santino, R. (2020). Como a alta do dólar pode causar uma disparada no preço de eletrônicos no Brasil. *Olhar digital*. Disponível em: <https://olhardigital.com.br/2020/03/05/noticias/como-a-alta-do-dolar-pode-causar-uma-disparada-no-preco-de-eletronicos-no-brasil/>, acesso em 18 de junho de 2023.
- Schwartzman, A. (2011). Sobre Jabutis e Jabuticabas. *Jornal Valor Econômico*.
- Silva, A. M. d., & Powell, A. B. Um Programa de Educação Financeira para a Matemática Escolar da Educação Básica. Em: *Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática*. Sociedade Brasileira de Educação Matemática - SBEM. Paraná, 2013.
- Solomon, M. R. (2011). *O comportamento do consumidor*. Bookman.
- Tecnisa. (2012). Crédito pessoal é sinônimo de dívida? *Blog Tecnisa*. Disponível em: <https://www.tecnisa.com.br/blog/mercado/credito-pessoal-e-sinonimo-de-divida/>, acesso em 1 de maio de 2014.
- Tesouro Direto. (s.d.). *Conheça o Tesouro Direto*. Tesouro Nacional. Disponível em: <https://www.tesourodireto.com.br/conheca/conheca-o-tesouro-direto.htm>, acesso em 24 de julho de 2023.
- Thaler, R. (1985). Mental Accounting and Consumer Choice. *Marketing Science*, 4, 199–214.
- Versignassi, A. (2016). Juro de 400% no cartão: não tem preço. *Super Interessante*. Disponível em: <https://super.abril.com.br/coluna/alexandre-versignassi/juro-de-400-no-cartao-nao-tem-preco/>, acesso em 18 de junho de 2023.
- Xiao, J. (2016). *Handbook of consumer finance research*. Springer.
- Xu, L., & Zia, B. (2012). *Financial Literacy around the World. An Overview of the Evidence with Practical Suggestions for the Way Forward* (Policy Research Working Paper). The World Bank, Development Research Group, Finance e Private Sector Development Team. Rio de Janeiro.
- Zentgraf, R. (2015). *Preciso Me Planejar!* SOU.L.



ACRÔNIMOS

AEC Antes da Era Comum

AEFE Ambientes de Educação Financeira Escolar

BC Banco Central

BNCC Base Nacional Comum Curricular

CAp-UFRJ Colégio de Aplicação da UFRJ

CEF Caixa Econômica Federal

COFINS Contribuição para o Financiamento da Seguridade Social

Copom Comitê de Política Monetária

COPPEAD /RJ Conselho Regional de Contabilidade do Estado do Rio de Janeiro

COPPEAD /UFRJ Instituto Instituto de Pós-Graduação e Pesquisa em Administração da UFRJ

COVID-19 Doença por coronavírus 2019

CPII Colégio Pedro II

CPMF Contribuição Provisória sobre Movimentação Financeira

EF Educação Financeira

EFCE/EFE Educação Financeira em Contextos Escolares

FGV Fundação Getúlio Vargas

IBGE Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

ICMS Imposto sobre Circulação de Mercadorias e Prestação de Serviços

IFRJ Instituto Federal do Rio de Janeiro

IGP-M Índice Geral de Preços do Mercado

II Imposto sobre a importação de produtos estrangeiros

INCC Índice Nacional de Custo de Construção

INPC Índice Nacional de Preços ao Consumidor

INSS Instituto Nacional do Seguro Social

IOF Imposto sobre Operações Financeiras

IOV Imposto sobre Operação de Crédito, Câmbio e Seguro ou relativas a Títulos ou Valores Mobiliários

IPA-M Índice de Preços por Atacado

IPC Índice de Preços ao Consumidor

IPC-M Índice de Preços ao Consumidor

IPCA Índice de Preços ao Consumidor Amplo

IPEA Instituto de Pesquisa Econômica e Aplicada

IPI Imposto sobre Produtos Industrializados

IPR Imposto Territorial Rural



IPTU Imposto sobre a Propriedade predial e Territorial Urbana
IPVA Imposto sobre Propriedade de Veículos Automotores
IR Imposto de Renda
ISS Imposto Sobre Serviços
ITBI Imposto sobre Transmissão inter vivos de Bens e Imóveis e de direitos reais a eles relativos
ITCMD Imposto sobre Transmissões Causa Mortis e Doações de Qualquer Bem ou Direito
LA Livro Aberto
LDB Lei de Diretrizes de Base
LFT Letra Financeira do Tesouro
LTN Letra do Tesouro Nacional
MEC Ministério da Educação
NEFE National Endowment for Financial Education
NTN-B Nota do Tesouro Nacional série B
NTN-B Princ NTN-B Principal
NTN-F Nota do Tesouro Nacional série F
OCDE Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
OIT Organização Internacional do Trabalho
PG progressão geométrica
PIB Produto Interno Bruto
PIS Programa de Integração Social
PNAD Contínua/PNAD Pesquisa Amostral Domiciliar Contínua
ProfMat Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
SEF situações econômico-financeiras
Selic Sistema Especial de Liquidação e de Custódia
SUS Sistema Único de Saúde
UFJF Universidade Federal de Juiz de Fora
UFPE Universidade Federal de Pernambuco
UFRJ Universidade Federal do Rio de Janeiro
UPA Unidade de Pronto Atendimento



NOTAS

Nota 1. (Página 5)

Sugestões e discussões

Negociando reajustes

Nessa primeira atividade, convidamos o aluno a pensar sobre os aumentos sucessivos no contexto do reajuste salarial de uma determinada categoria. Os aspectos matemáticos são importantes pois permitem entender que a taxa acumulada não é a soma das taxas, ainda que possa ser obtida por um processo aditivo. Apresentamos dois caminhos para obter a taxa acumulada, sendo o primeiro aditivo (calculando a porcentagem e somando ao valor inicial de cada etapa), e o segundo multiplicativo (considerando a multiplicação pelo fator de atualização $(1 + i)$, a cada aumento de uma taxa i). Recomendamos sempre que o primeiro processo anteceda o segundo, tanto na abordagem, como para uma possível demonstração. Para alunos do ensino fundamental, o primeiro processo já pode ser abordado aos poucos, conforme inclusive sugere a Brasil (2018) com as habilidades **EF05MA06**, **EF06MA13**, **EF07MA02** e **EF09MA05**. Para os alunos do Ensino Médio, além da retomada das habilidades do ensino fundamental, temos tanto a interpretação situações econômicas (**EM13MAT101**), como a interpretação e processo de cálculo de taxas e índices de natureza econômica (**EM13MAT104**), com uma oportunidade para o professor de matemática abordar o conceito de taxa acumulada, a partir de aumentos e descontos sucessivos, em contexto como inflação, salário e renda, bem como discutir as possibilidades de negociação em torno do valor calculado.

Nota 2. (Página 6)

Sugestões e discussões

Cobertor Curto

Primeiramente, é importante dizer que teremos sessões específicas para tratar da temática dos juros e do planejamento financeiro. Dois temas importantes para a Educação Financeira das pessoas, em especial, dos nossos estudantes. Entretanto, nessa primeira atividade, já convidamos o aluno a começar a pensar sobre orçamento financeiro (na perspectiva do diagnóstico) e planejamento financeiro (plano de construção e execução ações). A planilha mostra as receitas e despesas (pelo menos as principais) em um quadro de desequilíbrio. A presença dos juros, que serão abordados detalhadamente na próxima seção, mostra que gastar mais do que ganha tem um custo adicional. E que pagar juros, nessas condições, pode trazer consequências indesejáveis, adiando ou inviabilizando a realização de alguns projetos, sonhos ou expectativas. Reforçamos que teremos uma seção para investigar os diferentes tipos de juros, de forma sistematizada, discutindo por exemplo como podem ser favoráveis ao consumidor, bem como também teremos uma seção para tratar de orçamento e planejamento financeiros de forma detalhada. A presença da porcentagem na atividade aparece como demanda matemática da situação financeira. É no contexto da família que precisa ajustar seu orçamento atualmente desequilibrado que surge a necessidade de se calcular os juros para definir qual a economia necessária no mês seguinte para quitar a dívida e equilibrar o orçamento. Ou seja, os aspectos matemáticos são importantes na construção e execução das ações.

Essa atividade também está relacionada à habilidade **EM13MAT203**.



Nota 3. (Página 9)

Sugestões e discussões

Armadilha ou oportunidade?

Nessa atividade buscamos apresentar uma situação de consumo que convida o estudante a refletir sobre estratégias de venda, baseada em aumento (implícito) seguido de desconto (potencialmente ilusório), muitas vezes com o intuito de produzir no cliente uma possível sensação de ganho na compra de um produto. Para isso colocamos duas situações cujos preços são iguais, mas que podem mobilizar reações comportamentais diferentes, onde a sensação de ganho na segunda situação é fortemente estimulada, quando na comparação com a primeira. (Kahneman, 2012).

Aqui também buscamos, intencionalmente, usar a lente da Psicologia Econômica para introduzir a noção de ancoragem e de como esse efeito tem sido usado para influenciar as pessoas.

O processo mental de usar valores como referências de modo consciente ou inconsciente para tomar decisões é chamado de Ancoragem, conforme os estudos da psicologia econômica, dentre eles os de Kahneman e Tversky (2012).

Olhando para a atividade, é importante ter em mente os 500 reais podem estar ali porque a bolsa realmente custava R\$ 500,00, ou como armadilha mental, ou seja, apenas para servir de referência de modo a induzir nossa mente a acreditar na sensação de ganho, de oportunidade. Discuta com seus alunos essas duas possibilidades, mostrando a eles que muitas estratégias comerciais usam âncoras, valores que tomamos como referência para tomar decisões, e que tais valores podem ser usados intencionalmente para se pagar mais caro por um produto. Colocar um produto bem mais caro ao lado de um mais barato para criar a sensação de ganho, ainda que o mais barato esteja mais caro do que em outros lugares; usar preços como 2,99 e não R\$ 3,00; quebrar a proporcionalidade na venda de produtos, para induzir maior consumo como no caso da pipoca no cinema, do milk shake nas lanchonetes famosas de fast food; inserção de produtos super caros em cardápios para induzir a compra de produtos caros de menor preço são apenas alguns exemplos em que ancoragem é usada para induzir comportamento.

Recomendamos ao professor que peça aos alunos para pesquisarem na internet matérias, vídeos, e informações sobre a Black Friday, onde algumas práticas enganosas usando a estratégia de dar descontos sobre preços previamente aumentados, geraram um dos memes mais famosos sobre esse período: a Black Fraude.

Nota 4. (Página 10)

Sugestões e discussões

O desemprego entre os jovens no Brasil

Nessa atividade abordamos a temática Renda e Trabalho para convidar o estudante a refletir sobre a situação do jovem brasileiro que precisa ou opta por trabalhar, em uma fase da vida onde a formação inicial está (ou poderia estar) em curso. Aproveitamos para abordar a diferença entre aumentos percentuais e pontos percentuais, por se tratar de dois conceitos muito parecidos, mas essencialmente diferentes, e que costumam causar grande confusão. Quando algo aumenta de 20% para 30%, é muito comum pensar que o aumento foi de 10%, quando na verdade tivemos um aumento de 10 pontos percentuais, o que representa um aumento de 50%.

Recomendamos que o professor de matemática, em parceria com o de Geografia ou Sociologia por exemplo, discuta a partir das informações apresentadas na matéria, das fontes citadas no texto, de outras fontes contendo dados estatísticos de órgãos oficiais, algumas questões, dentre elas:



- Por que a situação brasileira afeta mais os jovens?
- Por que as taxas de desemprego entre os jovens no Brasil são tão altas, comparadas ao norte da África e ao Oriente Médio?
- Qual o perfil do jovem que não estuda e nem trabalha?
- O que poderia ser feito para mitigar o problema?

Essa atividade também está relacionada à habilidade **EM13MAT101** da BNCC

Nota 5. (Página 11)

Sugestões e discussões

A pandemia dos preços

Nessa atividade abordamos a temática aumento de preços, em especial a ocorrida com os alimentos na Pandemia de 2020.

Além dos aumentos percentuais, convidamos o aluno a pensar em questões econômicas como oferta e demanda, variação cambial, políticas de estoque dentre outras.

Essa atividade também está relacionada à habilidade **EM13MAT101**

Nota 6. (Página 14)

Sugestões e discussões

Como gasto o meu dinheiro?

Nessa atividade convidamos o aluno a pensar o peso da alimentação no orçamento das famílias. Em tom de humor, onde um gráfico de setores simula a figura do jogo “pacman” comendo o dinheiro da família, a imagem busca trazer para a discussão como os alimentos acabam comprometendo, juntamente com os custos com habilitação, uma boa parte do orçamento de milhões de famílias.

Por outro lado, há algumas imperfeições ou pelo menos alguns questionamentos ao peso de outros grupos. Por exemplo, no item b queremos discutir se os transportes costumam ter o mesmo que habitação? Ainda que seja algo que possa acontecer, não nos parece que seja o mais comum. A presença de perguntas abertas amplia as oportunidades de discussão. O objetivo aqui não é fazer contas ainda, mas trabalhar a comparação e o peso de grandes grupos de despesas. Outros gráficos, com informações que contemplem o perfil das famílias dos alunos são muito importantes para o envolvimento dos alunos e na identificação deles com as suas próprias questões, problemas e soluções de orçamento e de planejamento.

Recomendamos uma ampliação dessa atividade que é perguntar aos alunos quanto eles custam por dia? E por mês? Essa atividade costuma trazer surpresas e questionamento dos mais interessantes e inusitados possíveis.



Nota 7. (Página 17)

Sugestões e discussões

Sonhos de uma bolsista

Nessa atividade convidamos o aluno a pensar sobre o que faria com seu próprio orçamento se fosse um aluno bolsista, ou seja, se pudesse gerenciar totalmente seu próprio dinheiro proveniente de uma bolsa. A questão das trocas intertemporais aparece aqui. Satisfazer a pequenos desejos todo mês, ou ter paciência e força de vontade para guardar dinheiro para satisfazer a um sonho maior?

Nota 8. (Página 31)

Sugestões e discussões

O rapaz que editava vídeos

Nessa atividade convidamos o estudante a pensar uma situação que envolve escolhas já feitas pelo personagem e escolhas que serão feitas pela personagem. A resposta do [item a](#) é pessoal e tem como objetivo levantar a discussão sobre o que é ótimo financeiro e o ótimo pessoal. O que pode ser melhor para uma pessoa, pode ser péssimo para outra. Trazemos também uma discussão sobre a cobrança de imposto em algumas aplicações financeiras.

Chamamos a atenção para o fato de que é apesar do sistema de juros compostos ser o praticado nas duas situações, a forma como intencionalmente desenhamos a atividade faz com que isso seja desnecessário nessa situação. O importante aqui não está na forma dos juros, mas no tipo de aplicação, a incidência do tributo, o efeito disso na rentabilidade líquida, e de como isso é levado em consideração para tomar decisão.

Recomendamos que o professor amplie a parte das questões abertas, discutindo o que eles fariam com os 2.000,00 reais se estivessem no lugar do Fábio.

Nota 9. (Página 32)

Sugestões e discussões

O valor do amanhã

Nesta atividade convidamos o estudante a continuar pensando nas decisões de investimento de Fábio, trazendo um contexto com opções de investimento, ampliando-se os prazos nos quais o dinheiro ficará investido, e aumentando o número de opções de investimento. Buscamos aqui usar o simulador do site do Tesouro Direto. E isso tem duas implicações. O professor pode usar a própria atividade já pronta, ou criar sua própria atividade usando o simulador no próprio site, ou convidar os alunos a fazerem suas próprias simulações e investigarem seus próprios resultados. Na atividade, não queremos sobrecarregar os alunos com contas, mas convidá-los a experimentar, simular e investigar as diferentes modalidades, percebendo as diferenças entre elas. Essa atividade tem forte potencial para desenvolver a habilidade **EM13MAT203** da BNCC aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.



Nota 10. (Página 33)

Sugestões e discussões

Tomando decisões diante das emergências

Nesta atividade convidamos o estudante a analisar uma SEF envolvendo uma emergência que demanda uma tomada de decisão entre tirar o dinheiro na poupança para atender a emergência ou deixar o dinheiro na poupança e pedir dinheiro emprestado ao Banco, usando uma modalidade chamada Cheque Especial.

Aqui, o estudante vai precisar efetuar os cálculos do Valor Futuro, usando os modelos exponenciais adequados para isso. Recomendamos o uso de calculadora científica (também disponível para baixar nos smartphones e tablets).

Buscamos também convidar os alunos a compararem diferentes custos bancários, por meio da leitura da tabela e da simulação de diferentes taxas.

Finalmente, levamos em consideração o custo de oportunidade de Vanessa, ou seja, quanto ela deixaria de ganhar ao retirar o dinheiro da poupança, para uma análise mais completa da situação.

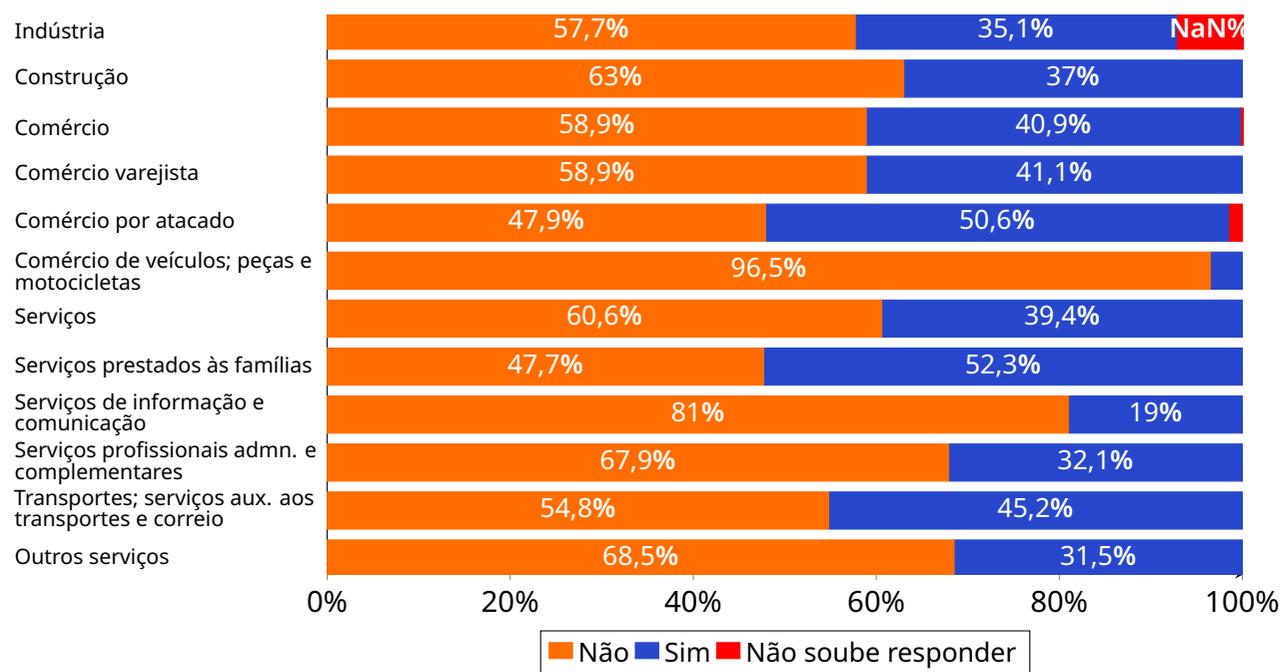
Nota 11. (Página 38)

Sugestões e discussões

Demissão na pandemia

Nessa atividade convidamos o aluno a pensar sobre um dos efeitos econômicos da Pandemia de 2020, que foi a demissão de muitos trabalhadores e o fechamento de várias empresas, com consequências para todos, conforme podemos ver, por exemplo, no relatório do IBGE.

Figura P.3: Empresas que encerraram suas atividades em decorrência da pandemia de COVID-19, em % do total de empresas, por atividades econômicas



Adaptado a partir de dados do IBGE.



Trazemos também para a discussão a questão dos direitos trabalhistas e sua efetiva execução. Os aspectos matemáticos, relacionados a capitais equivalentes, ajudam a compreender que o valor do dinheiro no tempo pode estar atrelado a benefícios, mas também a prejuízos, e pensar sobre isso de forma crítica (avaliando diferentes pontos de vistas, pensando de forma ética e fundamentada) é uma marca da nossa proposta, que se alinha com todos os documentos oficiais que balizam a Educação Básica no Brasil, tais como a Lei de Diretrizes de Base (LDB) e a BNCC. O professor deve observar que essa atividade poderia ser considerada como de juros compostos, sem problema algum. Isso serve para reforçar que problemas de juros compostos são casos particulares de capitais equivalentes, como já apontado no início desta seção.

Nota 12. (Página 39)

Solução

O enigma das taxas de juros invisíveis

a) Os livros didáticos de matemática apresentariam a solução da seguinte forma. Para encontrarmos a taxa de juros embutida nesta operação, temos que encontrar os valores que satisfazem à seguinte equação: $\frac{4.000}{(1+i)} + \frac{6.000}{(1+i)^2} = 9.500$, com $i \geq 0$, onde i representa a taxa. Ao resolvermos a primeira equação, encontramos dois valores, aproximadamente, para a taxa: $i = 0,0327$ e $i = -1,6116$. Observe que o único valor que satisfaz a ambas equações é $i = 0,0327$, ou seja, $i = 3,27\%$

Uma solução alternativa, que pode ser muito útil (Muniz Jr. & Jurkiewicz, 2016b) para convidar os alunos a pensarem a equivalência de capitais na mesma direção da passagem do tempo (do presente para o futuro), seria levar tudo para o futuro, como mostramos a seguir:

	0	1	2
Devo	9.500	$9500f$	$9500f^2 - 4000f$
Pago	0	4.000	6.000
Saldo	9.500	$9500f - 4.000$	0

b) Para este caso, é necessário resolver a equação $\frac{2.000}{(1+i)} + \frac{8.000}{(1+i)^2} = 9.500$, com $i \geq 0$, onde i representa a taxa. Ao resolver a primeira equação, encontramos dois valores, aproximadamente para a taxa: $i = 0,0289$ e $i = -1,8184$. Observe novamente que o único valor que satisfaz a ambas equações para esta situação é $i = 0,0289$, ou seja $i = 2,89\%$. Logo, a taxa da letra **b)** é menor que a taxa do **item a)**, pois $2,89\% < 3,27\%$.

Alternativamente, poderíamos responder à primeira pergunta do item b sem resolver a equação pensando que quanto mais demorar para pagar, menor será a taxa de juro. Olhar para os denominadores é um dos caminhos para se explicar isso.

Nota 13. (Página 55)

Sugestões e discussões

O dilema de caber no bolso — parcelas mensais e iguais

Essa atividade tem alguns (poucos) elementos das atividades tradicionais de séries uniformes encontradas em livros didáticos de matemática, e vários elementos diferentes.



A questão começa com duas perguntas abertas e, portanto, livres. Elas convidam o aluno a falar sobre suas escolhas e justificá-las, como se ele fosse o personagem da história. Se colocar no lugar do outro é um exercício importante pois além de mostrar um pouco como os alunos pensam a situação, como operam, julgam, avaliam e decidem, podem evidenciar aspectos não matemáticos, tais como os culturais, econômicos e sociais.

Será que o critério de caber no bolso será usado pelos alunos? Ou eles vão preferir fugir dos juros, mesmo que para isso escolham uma prestação um pouco maior que o planejado? Utilizarão algum cálculo ou processo, ou vão mobilizar o sistema 1 -- aquele rápido e preguiçoso -- para tomar a decisão.

Depois disso, o **item c** foca no processo de determinar a prestação de uma série uniforme postecipada, ou seja, aquela cujo valor atual da série está um período antes da série começar. De uma maneira prática, compra hoje, mas começa a pagar daqui a 1 mês. Esse item é tradicional, e daí o professor pode usar vários caminhos, desde a aplicação de uma fórmula, ao uso de simuladores em aplicativos ou até mesmo planilhas eletrônicas. Aqui busque o princípio da dualidade: educação financeira para aprender matemática e produzir matemática para aprender sobre situações financeiras. Dois lados de uma mesma ... educação financeira.

Finalmente o **item d** temos um outro tipo de tomada de decisão, na qual a pessoa tem dinheiro investido a 0,6% ao mês. Com isso, o valor do dinheiro no tempo pode influenciar a vantagem financeira de opções de pagamento com prazos mais dilatados. Cuidado. Será necessário usar a taxa da pessoa para transformar os valores das parcelas.

Nota 14. (Página 55)

Sugestões e discussões

O que será o amanhã?

Nesta atividade convidamos o estudante a usar os modelos construídos sobre valor presente e valor futuro de uma série para investigar uma situação financeira muito comum a milhões de brasileiros: contribuições mensais visando a aposentadoria. Temas atuais (olhando para 2019/2020) como a Reforma da Previdência (já sancionada) e Reforma Trabalhista (atualmente em discussão) são ótimas oportunidades para se pensar a realidade das famílias dos alunos, e o futuro dos próprios alunos.

Os modelos aqui estão associados às progressões geométricas, em especial a soma de termos de uma PG. Sugerimos bastante treino para que os alunos possam pensar com desenvoltura tais problemas e situações. Na seção de exercícios apresentamos várias SEF na forma de problemas inclusive que podem ser utilizados. Mas o professor pode criar os seus próprios problemas.

O professor pode usar simuladores prontos e as planilhas eletrônicas para facilitar as simulações e análises de sensibilidade, ou seja, quando o foco for investigar o comportamento de uma variável em função de outra, mantendo todas as outras constantes.

Por fim, procuramos trazer para essa atividade uma discussão sobre o impacto da inflação no poder de compra do valor futuro da série. O professor pode optar por discutir em outro momento, por exemplo, depois da abordagem da relação entre inflação e poder de compra (Efeito Fischer) que faremos em uma seção específica mais à frente.



Solução

O que será o amanhã?

a) A resposta é pessoal. Algumas possibilidades, dentre muitas, são: disciplina para manter isso durante tanto tempo, a manutenção dessa taxa de juros, resistir aos desejos de gastar o dinheiro acumulado em algum momento, não precisar gastar as reservas devido a emergências.

b) Ele fará 12 depósitos mensais durante 40 anos, logo fará 480 depósitos.

c) O valor da quantia pode ser calculado assim:

$$A = \frac{20.000(1,005^{180} - 1)}{1,005^{180} \cdot (0,005^{180})}$$
$$A = 2.370.070,29.$$

Esse é o valor que a pessoa precisa ter acumulado, em dezembro de 2060, para receber uma série de pagamentos de 20 mil reais, com o primeiro em janeiro de 2061 e o último em dezembro de 2075. Observe que o valor atual da série de benefícios (recebimentos) é o valor futuro da série de pagamentos.

Agora, basta calcular qual o valor da quantia que precisa ser depositada mensalmente durante os quarenta anos para produzir esse acumulado, considerando as datas estabelecidas, o que pode ser feito assim:

$$P_1 = \frac{2.780.070,29 \cdot (1,005 - 1)}{(1,005^{180} - 1)}$$
$$P_1 = \text{R\$ } 1.190,10.$$

Nas tabelas a seguir, temos um resumo da operação usando as funções financeiras de uma planilha eletrônica.

1ª Operação		2ª Operação	
PMT	20.000	VF	R\$ 2.370.070,29
<i>n</i>	180	<i>n</i>	480
<i>i</i>	0,50 %	<i>i</i>	0,50 %
VP	R\$ 2.380.070,29	PMT	R\$ 1.190,10
Tempo de contribuição		Tempo de recebimentos	
Jan/21*	Dez/60	Jan/61*	Dez/75
Depósito 1	Depósito 480	Renda 1	Renda 180
R\$ 1.180,10	R\$ 1.180,10	R\$ 20.000,00	R\$ 20.000,00
* Fez 25 anos		* Fez 65 anos	

d) Considerando a inflação de 3 % ao ano, uma pessoa vai conseguir comprar com R\$ 20.000,00 o que consegue comprar hoje com

$$VP = \frac{2.000}{1,03^{40}}$$
$$VP = \text{R\$ } 5.131,14.$$



Isso significa que uma pessoa precisará ganhar 20 mil reais daqui a 40 anos para manter o padrão de compra de uma pessoa que ganha, nos dias atuais, aproximadamente 5 mil reais. É preciso levar em consideração a inflação nessa estratégia, para não correr o risco de achar que um determinado valor vai poder suprir as necessidades de uma fase da vida com mais desafios e menor força de trabalho.

Nota 15. (Página 58)

Sugestões e discussões

Velozes e Furiosos! Uma conversa sobre taxas equivalentes

Nesta atividade, baseado em taxas reais (de set 2019), disponíveis no site do Banco Central, convidamos o aluno pensar sobre a situação das taxas de juros no Brasil, em especial às taxas que nos cobram. E para isso, entender o conceito de equivalência de taxas pode ser muito importante. Escolhemos para essa atividade as taxas de juro do crédito rotativo do Cartão de Crédito por ser uma das maiores aberrações da realidade econômica Brasileira. E algo que costuma atormentar a vida de milhões de Brasileiros segundo dados do Serasa Experian.

Tenha em mente que os modelos exponenciais ajudam a compreender taxas equivalentes e calculá-las. Mas elas podem ser abordadas já no ensino fundamental (9º ano por exemplo), com auxílio de calculadoras e/ou planilhas, usando processos multiplicativos apenas. Usar aplicativos de celulares também podem ser um bom caminho, tendo sempre o cuidado de convidar o estudante a entender os processos, e a estabelecer relações funcionais.

Aproveite essa oportunidade para discutir os processos aditivos e multiplicativos envolvidos na apresentação e cálculo dessas taxas, e como nosso cérebro tende a sobrepor o pensamento aditivo sobre o multiplicativo.

Finalmente, perceba que ricos e pobres tomam dinheiro emprestado, sendo que os objetivos geralmente são diferentes. E que o crédito está diretamente associado às taxas equivalentes, pois são uma medida rápida de comparação de custo desse crédito, e muitas vezes usada para tomar decisão financeira.

Finalmente, registramos que esse tema influencia a vida de amplo espectro da sociedade brasileira, o que reforça e justifica sua abordagem no Ensino Médio.

Nota 16. (Página 62)

Sugestões e discussões

Imprevistos e Cheque especial: uma dupla explosiva

Nesta atividade, convidamos o aluno a tomar decisões diante de uma situação de emergência, mas agora olhando para as taxas das opções que têm. Inserimos os valores tanto para criar uma possibilidade para o cálculo das taxas equivalentes como para retomar o conceito de juros compostos abordado anteriormente.

Não colocar a taxa do cheque especial foi proposital, pois deixar isso aberto vai exigir que o aluno perceba a necessidade dessa informação, e daí empreender uma busca por ela. Também temos a intenção com isso, de que a atividade possa ser realizada com os dados atualizadas no momento de aplicação dela. Com isso, o gabarito é claro se altera, mas o aluno ganha na pesquisa, na investigação e na sensação de realidade ao trabalhar com dados atualizados. Os dois dias foram inseridos para representar a emergência da situação, e tirando isso, podem ser ignorados para todo o resto.



Solução

Imprevistos e Cheque especial: uma dupla explosiva

a) A estratégia mais eficiente seria Cláudia utilizar o dinheiro da poupança, pois não pagaria juros no empréstimo

Outro caminho é comparar a sua taxa de retorno (0,6 % a.m.) com a taxa de juro do empréstimo (em setembro de 2020, por exemplo, a taxa do cheque especial estava em 7,54 % ao mês, bem maior que 0,6 % a.m.), conforme mostra a [Tabela P.3](#) a seguir.

Veja que basta comparar as taxas para tomar uma decisão mais favorável do ponto de vista **exclusivamente financeiro**.

Tabela P.3: Taxas de Juros.

Posição	Instituição	% a.m.	% a.a.
1	Banco Ribeirão PRETO S.A.	0,91	11,50
2	Banco Crefisa S.A.	1,45	18,89
3	Banco Alfa S.A.	1,80	23,89
4	Banco Sofisa S.A.	2,24	30,45
13	Banco Inter	6,00	101,20
14	Banco do Estado do Paraná S.A.	6,01	101,48
15	Banco Daycoval S.A.	6,77	119,44
16	Banco C6 S.A.	7,48	137,71
17	Banco do Brasil S.A.	7,54	138,27

- Período: 21/08/2020 a 27/08/2020
- Modalidade: Pessoa física — Cheque especial
- Tipo de encargo: Pré-fixado

b) Os R\$ 5.000,00 se aplicados na poupança a uma taxa de 0,5 % durante 6 meses daria o valor de R\$ 5.182,72

Por outro lado, tomando dinheiro emprestado a 7,5 % ao mês (Banco do Brasil em setembro de 2020), em 6 meses ela pagaria de Juros:

$$J = 5.000 \times (1 + 7,5\%)^6 - 5.000$$
$$J = \text{R\$ } 2.716,51$$

Para fins de comparar taxas, e tomar decisão sobre a opção com menor perda financeira, também poderíamos usar apenas a equivalência de taxas. Chamando de I_1 e I_2 as taxas de retorno da poupança e de juro do cheque especial, equivalentes às respectivas taxas mensais dadas, temos:

$$I_1 = (1 + 0,6\%)^6 - 1 = 3,65\% \text{ a.s.}$$

$$I_2 = (1 + 7,5\%)^6 - 1 = 54,33\% \text{ a.s.}$$

Para responder ao item [item b](#), temos o seguinte quadro:



Se ela deixar o dinheiro na poupança, ao final de seis meses ela ganhará R\$ 182,72 pela aplicação, mas perderá (pagando de juros) R\$ 2.716,51, gerando uma perda líquida de R\$ 2.533,79.

Se ela usar o dinheiro na poupança para emergência e não tomar dinheiro emprestado no cheque especial, ao final de seis meses ela terá uma perda líquida de R\$ 182,72, pois não terá pago nada de juros.

A diferença, dadas as taxas absurdas cobradas no Brasil, também é absurda. Isso reforça a importância do tema e do cuidado que as pessoas devem ter com o uso do cheque especial (muito fácil de usar pois está disponível a qualquer momento).

Nota 17. (Página 62)

Sugestões e discussões

Reduzindo taxas e ampliando oportunidades

Nessa atividade, convidamos o aluno a investigar como pequenas reduções em taxas mensais podem gerar grandes reduções em taxas equivalentes em prazos maiores. Mais do que um problema sobre a conversão de taxa mensal para anual, ou seja, de equivalência de taxas, essa situação financeira pode ser usada como um convite a pensar como a redução de taxa de juro cobrada das pessoas pode gerar grandes oportunidades. Juros pagos podem ser sonhos adiados. Juros pagos podem ser desejos destruídos. Na medida que a população tenta lutar contra esse sistema de juros altos, se planejando para tentar não recorrer a eles, ela tende a força a queda dos juros. Crédito aqui pode funcionar como um produto qualquer: se a demanda diminui então o preço do crédito tende a cair também. E uma população que tenta pensar e agir assim, pode colher os frutos de um crédito mais barato.

Nota 18. (Página 63)

Solução

Velozes e Furiosos 2 — As taxas atacam novamente

a) Modalidade de Crédito Consignado: Esta é uma modalidade de empréstimo destinada somente para as pessoas aposentadas e/ou pensionistas INSS, militares das forças armadas, trabalhadores assalariados de empresas privadas e servidores públicos. É importante dizer que as parcelas do empréstimo nessa modalidade são deduzidas diretamente de folha de pagamento ou benefício da pessoa física.

Modalidade de Crédito de Cheque Especial: Esta é uma modalidade de empréstimo pré-aprovado pelo banco para o correntista (pessoa que possui conta corrente no banco).

Modalidade de Crédito no Cartão de Crédito Rotativo: Quando o consumidor não faz o pagamento total da fatura do cartão de crédito até o seu vencimento, este crédito é oferecido. O termo rotativo acontece quando o consumidor efetua qualquer pagamento menor que o valor total da fatura do cartão de crédito.

b) A primeira modalidade é mais barata que as outras devido a esse público de pessoas possuírem uma garantia de uma renda mensal (salário), ou seja, as chances dessas pessoas não terem dinheiro para honrar o empréstimo com o banco é baixa.

c) Resposta pessoal.



Nota 19. (Página 65)

Sugestões e discussões

Crédito pessoal é sinônimo de dívida?

Nessa atividade, convidamos o estudante a pensar sobre o custo e facilidade do crédito a partir de um texto bem provocativo. O trecho abaixo é um exemplo da reflexão a que a atividade nos convida.

Nos últimos anos fomos envolvidos por grandes campanhas que ofereciam crédito quase que como frutas ou legumes que encontramos nas feiras livres. Bastava escolher a “melhor banca” e o “melhor produto”, mas com um diferencial: pagamentos a perder de vista. A estratégia arriscada não é nova e a prática comprovou que se trata de um tiro no pé do consumidor — ele se satisfaz momentaneamente e cria (muitos) problemas para o futuro.

Retomamos a discussão sobre o rotativo do cartão de crédito, pois as facilidades de uso do cartão de crédito acompanhadas de uma falta de controle, podem gerar o uso desnecessário desse tipo de crédito. Ele é fácil, mas é muito caro. Gastar mais do que se pode pagar também é algo fácil de acontecer, principalmente quando vivemos tempos de crise, ou de euforia generalizada. No primeiro temos necessidades básicas a serem atendidas. No segundo temos necessidades de termos o luxo que às vezes não podemos ter, ou status que nunca precisaríamos ter.

Independente da motivação e das justificativas, a questão sempre é complexa, pois sempre passa por uma decisão: o que é que tem mais valor pra mim naquele momento? Ou quais são as opções que eu tenho disponíveis naquele momento?

Entender o custo do dinheiro fácil, e como pode ser difícil e doloroso pagar por esse dinheiro que não se tem, talvez possa ajudar as pessoas no planejamento do consumo baseado na capacidade financeira pessoal e familiar.

Nota 20. (Página 78)

Sugestões e discussões

De quanto é a inflação anual no Brasil?

Nessa atividade convidamos o aluno a pensar sobre a inflação no Brasil e o impacto dela no poder de compra da população. Para isso vamos pensar em dois cenários: salários sendo corrigidos apenas pela inflação, e salários tendo ganho real (acima da inflação). Usamos os salários, pois são o meio mais comum de obtenção de dinheiro das famílias brasileiras.

Nos **itens a** e **c** temos a oportunidade de trabalhar a inflação média, que nesse caso é obtida por meio de uma média geométrica dos fatores anuais de inflação. Aqui temos duas recomendações para o professor. A primeira é começar com a inflação média de dois anos apenas (**item a**). Depois passar para três anos (**item b**). E a partir daí ir avançando até chegar em um período tão longo quanto o apresentado (**item c**). Ou seja, do **item b** para o **item c**, pode ser necessário ter mais treinamento, dependendo das condições do professor.

Nos **itens d** e **e**, abordamos a correção dos salários para manter o poder de compra, e depois para ter ganho real. Vários temas podem ser abordados aqui, tais como a desigualdade salarial no Brasil, distribuição de Renda, Desigualdade nos salários entre homens e mulheres, dentre muitos outros. Use o seu contexto para gerar oportunidades de reflexão nos seus estudantes.



Sugestões e discussões

Inflação e investimento: impactos nos projetos de longo prazo

Nessa atividade convidamos o aluno a pensar sobre o impacto da inflação no seu projeto de proteção no futuro. R\$ 100 mil hoje têm o mesmo valor que daqui a 30 anos? Provavelmente terá um valor menor, na medida que o poder de compra dessa quantia será reduzido por alguns fatores, dentre eles a inflação acumulada no período.

O professor pode focar apenas na análise do impacto da inflação sobre o valor acumulado (valor futuro da série uniforme apresentada). Mas também pode discutir como se chega a esse valor acumulado, podendo retomar as séries uniformes.

Solução

Inflação e investimento: impactos nos projetos de longo prazo

O poder de compra desses um milhão daqui a 30 anos, a uma taxa de 4% ao ano, será de

$$\frac{1.000.000}{(1 + 0,04)^{30}} = \text{R\$ } 308.318,67.$$

Isso significa que, considerando essa inflação, será necessário ter um milhão de reais daqui a 30 anos para conseguir comprar o que se compra hoje com 308 mil reais, aproximadamente.

c) Para calcular a inflação média é necessário multiplicar os fatores $(1 + i)$ de cada um dos 25 anos para encontrar a inflação acumulada do período de 1995 a 2019. Depois é necessário calcular a média geométrica, daí temos $\sqrt[25]{5,241388} = 1,0685$ (fator de aumento), logo, a inflação média do período de 1995 até 2019 é $(1 + i) = 1,0685$, com $i = 0,0685 = 6,85\%$.

d) i) Para que o operário mantivesse o seu poder de compra do mesmo salário de R\$ 1.000,00 em 1995, no início de 2020, o seu salário deveria ser de

$$1000 \times 5,241388 = \text{R\$ } 5.241,39.$$

ii) Para que o operário dobrasse o seu salário, ele teria que receber em 2020 um valor de

$$2000 \times 5,241388 = \text{R\$ } 10.482,77.$$

e) A melhor opção seria o operário escolher ganhar um salário de R\$ 1.000,00 no início de 1995, pois em 1994 o poder de compra dele seria de

$$1000 \times 1,2241 \times 1,0956 \times 1,0522 = \text{R\$ } 1.411,13,$$

e este valor é maior do que a empresa estaria lhe oferecendo em 2018.



Nota 22. (Página 87)

Solução

Tributação do IR nos investimentos

No item α , temos

■ Opção 1

$$VF = 200.000 \times (1 + 0,75\%)^5 \cong \text{R\$ } 207.613,35$$

Rentabilidade = R\$ 7.613,35

■ Opção 2

$$VF = 200.000 \times (1 + 0,9\%)^5 \cong \text{R\$ } 209.163,46$$

$$VF_{cir} = 209.163,46 - 9.163,46 \times 22,5$$

$$VF_{cir} \cong \text{R\$ } 7.101,69$$

A Tabela P.4 sintetiza os resultados:

Tabela P.4: Resultados do item α . Valores em reais

	Opção 1	Opção 2
Valor Investido	200.000,00	200.000,00
VF Bruto	207.613,35	209.163,46
Rentabilidade bruta	7.613,35	9.163,46
Imposto de Renda	0,00	2.061,78
Rentabilidade líquida	7.613,35	7.101,69

Os cálculos mostram que o investimento com menor taxa acabou se mostrando mais rentável na comparação com o investimento de maior taxa, mas que é taxado pelo IR. Assim, é preciso ficar atento aos impostos e taxas cobradas, pois se algo que pode parecer ser mais vantajoso do ponto de vista financeiro, na verdade não é.

No item b , operando da mesma forma, temos os seguinte resultados:

Tabela P.5: Resultados do item b . Valores em reais

	Opção 1	Opção 2
Valor Investido	200.000,00	200.000,00
VF Bruto	239.282,71	247.980,71
Rentabilidade bruta	39.282,71	47.980,76
Imposto de Renda	0,00	7.197,1
Rentabilidade líquida	39.282,71	40.783,65

Nesse caso, como o dinheiro ficou aplicado por mais tempo, foi tributado com uma alíquota menor, gerando maior rentabilidade.



Olhando para as duas simulações, podemos concluir que a incidência do IR sobre os investimentos não significa que ele seja menos vantajoso. Tal decisão vai depender das opções disponíveis, das taxas cobradas e do prazo do investimento, dentre outros aspectos.

No [item c](#), a resposta é pessoal.

Nota 23. ([Página 95](#))

Sugestões e discussões

Desconto progressivo: oportunidade ou enganação ancorada?

Nessa atividade convidamos o aluno a pensar sobre como algumas propagandas induzem o consumidor a pensar que está tendo uma vantagem acima daquela que efetivamente está sendo oferecida. Nesse caso, o consumidor pensa que o desconto progressivo é concedido sobre o total da compra, mas não é. As pessoas são induzidas a se ancorarem nos percentuais, e acabam se esquecendo ou não se dando conta de perceber sobre que valores esses percentuais de fato serão aplicados.

Solução

Desconto progressivo: oportunidade ou enganação ancorada?

a) O total máximo de desconto será 12,5 % de desconto, pois o desconto máximo acontece quando as duas peças possuem valores iguais. Então, suponha que você compre duas peças, cada uma a R\$ 100,00, logo, irá pagar no total da compra o valor de R\$ 175,00. Daí, o desconto foi de 12,5 % com relação ao total e não de 25 %. Um outra forma de pensar seria comprar peças separadas, ou seja, ir à loja e comprar cada peça de uma vez, daí o desconto máximo sempre seria de 15 %.

b) O mesmo raciocínio do [item a](#), mas o desconto máximo seria de 10 %, pois o consumidor pagaria R\$ 450,00 se comprasse 5 peças, cada uma a R\$ 100,00, e não de 50 %. Se o consumidor opta por comprar as roupas separadas, o desconto seria maior neste caso.

c) Resposta individual.

d) O consumidor teria um desconto maior se fosse progressivo sobre o total da compra.

Nota 24. ([Página 95](#))

Sugestões e discussões

Indenizações e ancoragem

Coisas importantes sobre essa situação. Veja que a ancoragem foi utilizada de maneira sutil e tendenciosa para gerar em você e no juiz uma âncora demasiadamente baixa. Se ele subir a proposta para R\$ 2.000,00 aumentará a chance de você aceitar, pois é possível que você abandone a âncora de R\$ 5.000,00 do caso do seu amigo, para ficar com a nova âncora de R\$ 1.000,00 intencionalmente apresentada pelos advogados da empresa de Telefonia. Ainda assim, dependendo da situação, uma pessoa pode avaliar que é melhor receber R\$ 1.000,00 do que nada (o juiz pode entender que não houve prejuízo ao cliente) ou que se a empresa recorrer da decisão, você pode demorar muito tempo para receber um valor que seria, para



you, more just. It is better R\$ 1,000.00 now than more when I don't know. See also that we can get here two Anchors, both the one he has from the other indemnification, as the one presented by the lawyers.

Coleção Livro Aberto de Matemática

O esforço para produzir livros didáticos de matemática com licença aberta começou em 2016, com a elaboração do material de Frações para o Ensino Fundamental I. Desde então, novos elaboradores acreditaram e juntaram-se ao projeto para alcançarmos novos níveis e novos livros.

Hoje, possuímos diversos capítulos escritos e vários livros em produção. Tudo isso a partir de um trabalho colaborativo envolvendo matemáticos, professores universitário e professores da Educação Básica.

Um princípio fundamental desta iniciativa é que sua produção configure uma proposta pedagógica ancorada e acompanhada por pesquisa científica em Ensino de Matemática.

O projeto tem também compromisso com a formação e o desenvolvimento profissional de professores. Em particular, pela composição característica da equipe, destaca-se o entendimento do potencial do projeto para enfrentar um reconhecido desafio: estreitar o diálogo entre a realidade e as demandas próprias da prática docente e a formação acadêmica do professor.

O Livro Aberto de Matemática é um projeto do IMPA, desenvolvido em suas etapas iniciais pela Associação Livro Aberto com financiamento da Fundação Itaú Social e apoio da UNIRIO e da UFRJ.

Realização



Patrocínio

